

Διοίκηση Λειτουργιών

Διοίκηση Έργων IV
(Η τεχνική PERT)

- 8^ο μάθημα -

Η τεχνική PERT

Μεταβλητότητα στους χρόνους των δραστηριοτήτων

- ☑ *Η CPM θεωρεί γνωστούς και σταθερούς χρόνους για κάθε δραστηριότητα.*
 - ☑ *Καμιά διακύμανση στους χρόνους. Στην πράξη αυτό δεν συμβαίνει συχνά. Υπάρχει αβεβαιότητα.*
- ☑ *Η PERT χρησιμοποιεί μια πιο ρεαλιστική προσέγγιση. Θεωρεί πιθανοτική κατανομή στους χρόνους κάθε δραστηριότητας*
 - ☑ *Θεωρεί δηλαδή τους χρόνους ως στοχαστικές μεταβλητές οι οποίες ακολουθούν μια κατανομή πιθανότητας. Συγκεκριμένα την **κατανομή βήτα**.*

Μεταβλητότητα στους χρόνους των δραστηριοτήτων

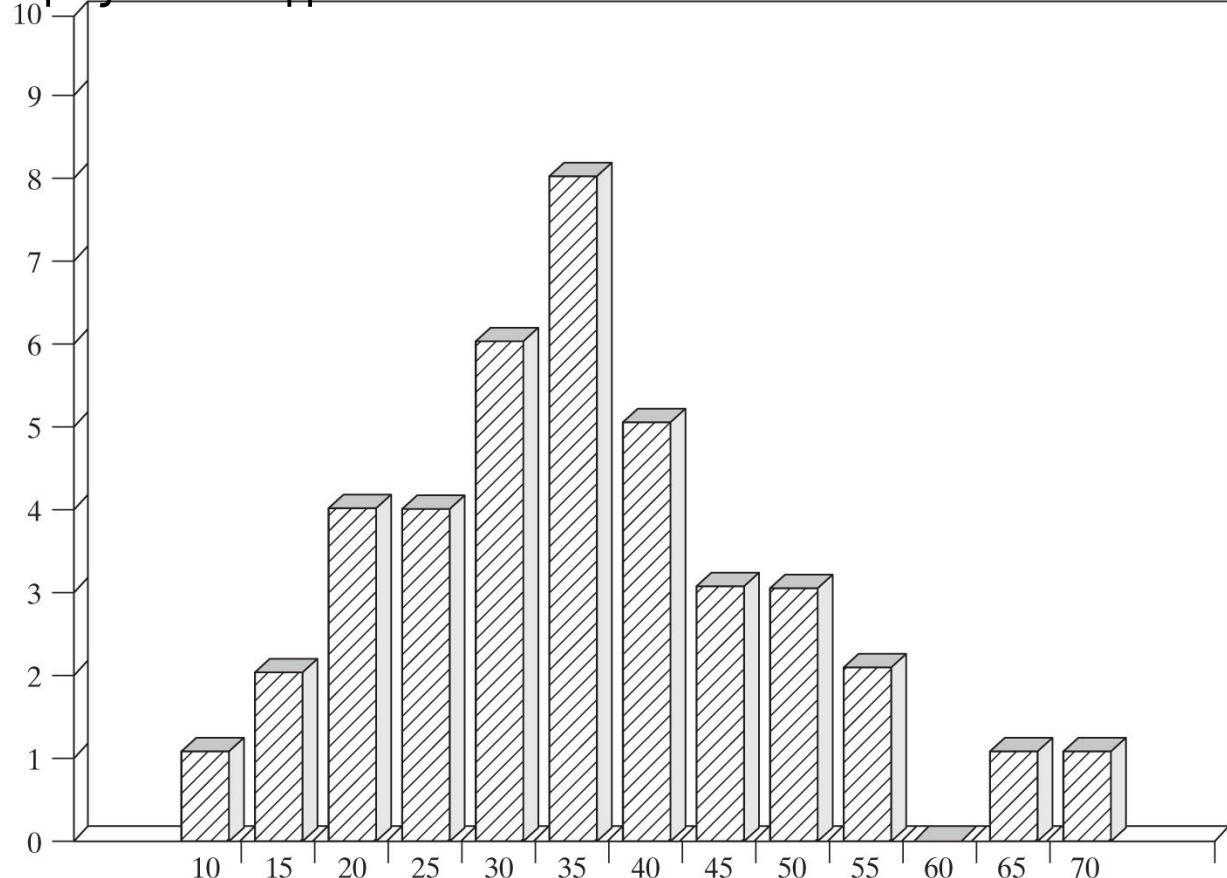
- ☑ **Η PERT θεωρεί 3 εκτιμήσεις χρόνου**
 - ☑ **Η αισιόδοξη (α)** - *Optimistic time* – αν όλα πάνε όπως λέει το αρχικό σχέδιο ($\leq 1\%$)
 - ☑ **Η απαισιόδοξη (β)** - *Pessimistic time* - θεωρώντας τις πιο απαισιόδοξες συνθήκες ($\leq 1\%$)
 - ☑ **Η πιο πιθανή (m)** - *Most likely time* – πιο πιθανή εκτίμηση

Εκτίμηση της διάρκειας μιας δραστηριότητας

Παράδειγμα

- ♦ Μια δραστηριότητα εκτελέστηκε στο παρελθόν πολλές φορές και ο αναγκαίος χρόνος για την εκτέλεση της κυμάνθηκε από 10 ως 70 ώρες (βλ. εικόνα).

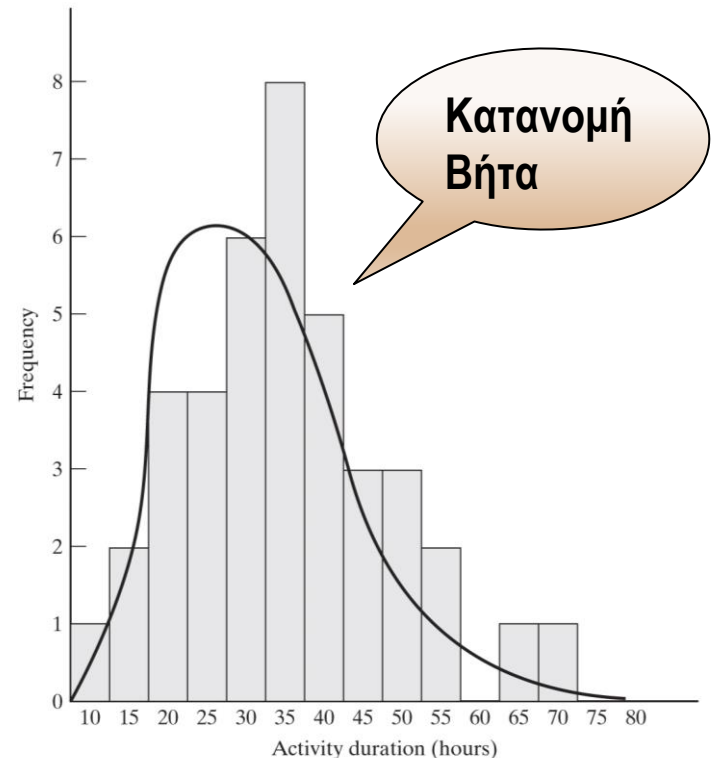
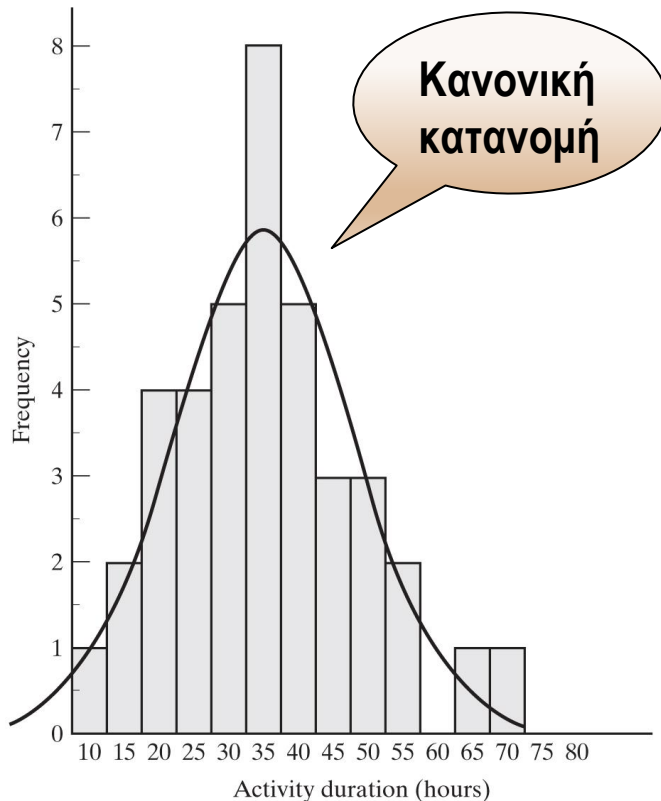
Αριθμός επαναλήψεων



Διάρκεια (ώρες)

Εκτίμηση της διάρκειας μιας δραστηριότητας

- ♦ Η διάρκεια της δραστηριότητας προσεγγίζεται με μια κατανομή πιθανότητας όπως φαίνεται πιο κάτω.



Μεταβλητότητα στους χρόνους των δραστηριοτήτων

Αναμενόμενος ή μέσος χρόνος κάθε δραστηριότητας

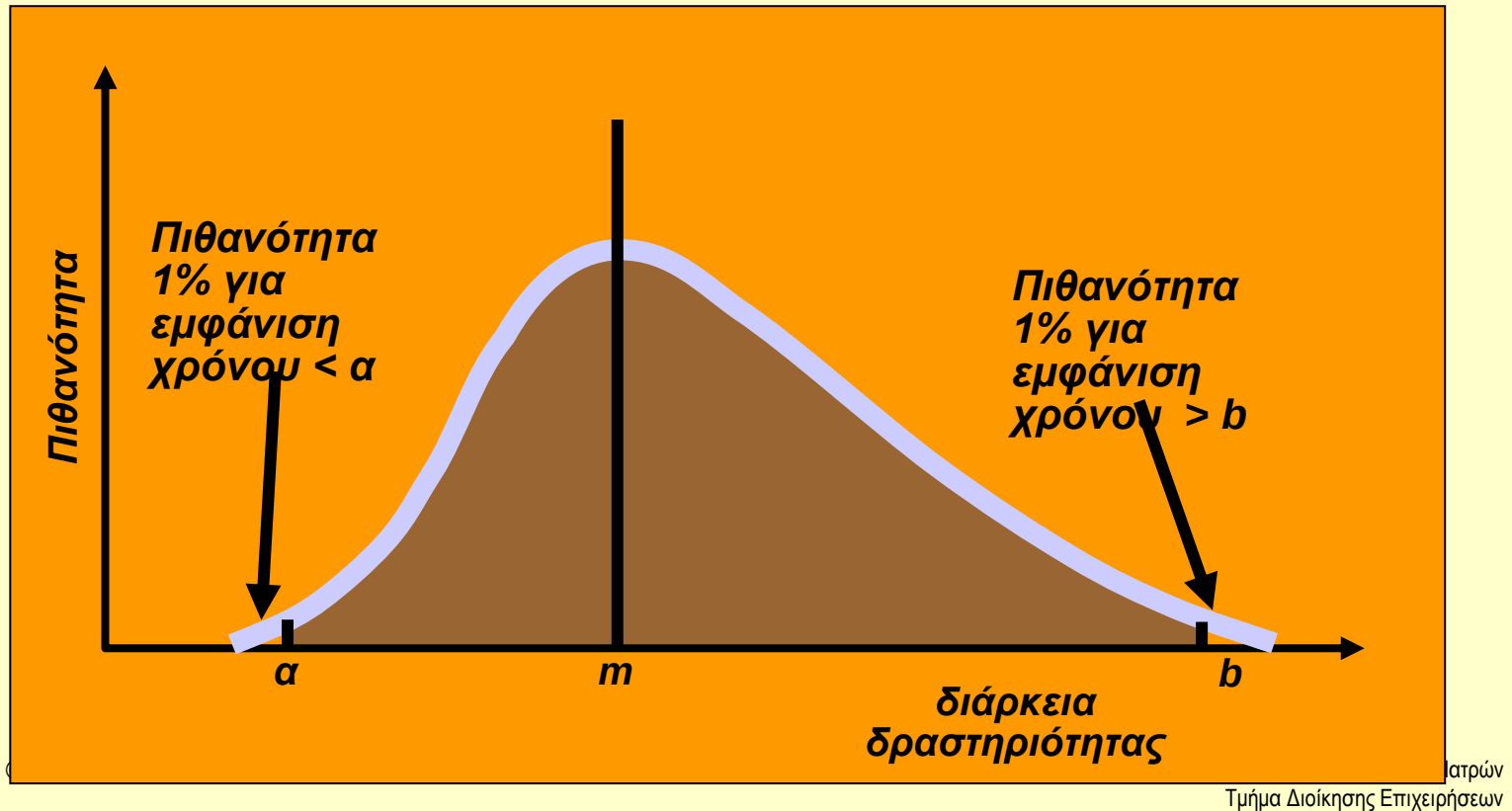
$$t = \mu = \frac{a + 4m + b}{6}$$

Διακύμανση των χρόνων

$$\sigma^2 = \left(\frac{b - a}{6} \right)^2$$

PERT: Μεταβλητότητα στους χρόνους των δραστηριοτήτων

Οι εκτιμήσεις ακολουθούν την κατανομή βήτα



Παράδειγμα έργου με αβεβαιότητες στους χρόνους

Έργο: Ανάπτυξη Ολοκληρωμένου Πληροφοριακού Συστήματος Υγείας

Δραστηριότητα	Περιγραφή Δραστηριότητας	Άμεσα Προηγούμενη
A	Διαχείριση Ασθενών	-
B	Εργαστήρια	-
C	Τράπεζα Αίματος	A
D	Συνταγολόγηση	A, B
E	Διαχείριση Προσωπικού	C
F	Διαχείριση Αποθήκης	C
G	Έξυπνη Κάρτα	D, E
H	Ηλεκτρονικός Φάκελος Ασθενή	F, G

Υπολογισμός διακύμανσης: Έργο «Ανάπτυξη ΟΠΣΥ»

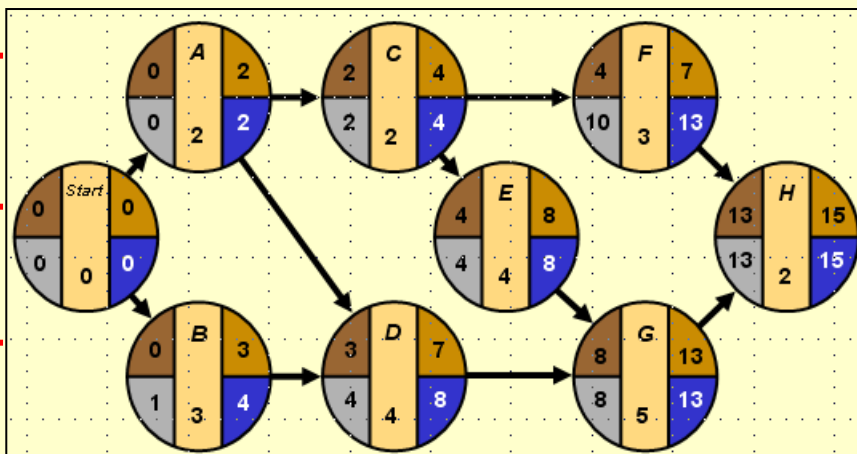
Δραστηρ	Πιο		Αναμενόμενος		Διακύμανση
	Αισιόδοξος α	πιθανός m	Απαισιόδοξος b	Χρόνος $\mu = (\alpha + 4m + b)/6$	
A	1	2	3		
B	2	3	4		
C	1	2	3		
D	2	4	6		
E	1	4	7		
F	1	2	9		
G	3	4	11		
H	1	2	3		

Υπολογισμός διακύμανσης: Έργο «Ανάπτυξη ΟΠΣΥ»

Δραστηρ	Πιο			Αναμενόμενος	
	Αισιόδοξος α	πιθανός m	Απαισιόδοξος b	Χρόνος $\mu = (\alpha + 4m + b)/6$	Διακύμανση $[(b - \alpha)/6]^2$
A	1	2	3	2	0,11
B	2	3	4	3	0,11
C	1	2	3	2	0,11
D	2	4	6	4	0,44
E	1	4	7	4	1,00
F	1	2	9	3	1,78
G	3	4	11	5	1,78
H	1	2	3	2	0,11

Υπολογισμός διακύμανσης: Έργο «Ανάπτυξη ΟΠΣΥ»

Δραστηρ	Πιο Αισιόδοξος α	πιθανός m	Απαισιόδοξος b	Αναμενόμενος Χρόνος $\mu = (\alpha + 4m + b)/6$	Διακύμανση $[(b - \alpha)/6]^2$
A	0	2	4	2	0,11
B	0	3	4	3	0,11
C	0	2	4	2	0,11
D	0	4	8	4	0,44
E	0	4	8	4	1,00
F	1	3	4	3	1,78
G	3	5	8	5	1,78
H	1	2	3	2	0,11



Κρίσιμη διαδρομή: **A-C-E-G-H**

Πιθανότητα ολοκλήρωσης ενός έργου

Η μέση διάρκεια του έργου

$$\mu_p = \sum (\text{μέσης διάρκειας των δραστηριοτήτων επί της κρίσιμης διαδρομής})$$

Η διακύμανση του έργου

$$\sigma_p^2 = \sum (\text{διακυμάνσεων των δραστηριοτήτων επί της κρίσιμης διαδρομής})$$

- Εάν υπάρχουν πάνω από μια κρίσιμες διαδρομές, ως χρονικά μεγαλύτερη θεωρούμε εκείνη με τη μεγαλύτερη διακύμανση.

Πιθανότητα ολοκλήρωσης ενός έργου

Η διακύμανση ενός έργου υπολογίζεται αθροίζοντας τις διακυμάνσεις των κρίσιμων δραστηριοτήτων

Διακύμανση έργου «Ανάπτυξη ΟΠΣΥ»

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= 0,11 + 0,11 + 1,00 + 1,78 + 0,11 \\ &= 3,11\end{aligned}$$

Τυπική απόκλιση του έργου

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \sqrt{\text{διακύμανση έργου}} \\ &= \sqrt{3,11} = 1,76 \text{ βδομάδες}\end{aligned}$$

Σημαντική Παρατήρηση

- ◆ Όταν σε ένα δίκτυο υπάρχουν περισσότερες από μια κρίσιμες διαδρομές τότε η τυπική απόκλιση της τυχαίας μεταβλητής T που εκφράζει τον συνολικό χρόνο ολοκλήρωσης του έργου θεωρείται η μεγαλύτερη τυπική απόκλιση που υπολογίζεται από κάθε μια κρίσιμη διαδρομή.
- ◆ Τα ίδια ισχύουν και για τη διακύμανση της T .
- ◆ Επομένως, ως πιο κρίσιμη διαδρομή ξεχωρίζει αυτή με τη μεγαλύτερη τυπική απόκλιση.

Παράδειγμα πιθανότητας PERT

- ♦ Είσαι υπεύθυνος έργου ανάπτυξης λογισμικού ελέγχου της φόρτωσης και εκφόρτωσης containers στο λιμάνι της Πάτρας. Το έργο έχει αναμενόμενο χρόνο ολοκλήρωσης 40 βδομάδες, με μια τυπική απόκλιση 5 βδομάδες.
- ♦ Ποια είναι η πιθανότητα το έργο να ολοκληρωθεί το πολύ σε 50 βδομάδες;



Υπολογισμός πιθανότητας ολοκλήρωσης έργου

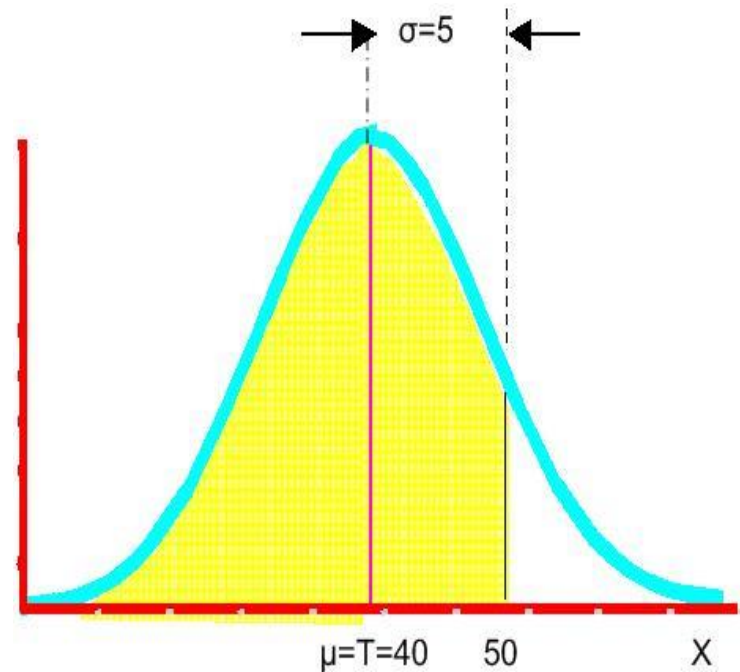
- ♦ **Κανόνας:** Όταν γνωρίζουμε:
 - ♦ Τον αναμενόμενο χρόνο ολοκλήρωσης του έργου
 - ♦ Τη διακύμανση ή την τυπική απόκλιση του έργου
- ♦ Μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα το έργο να ολοκληρωθεί σε “X” περιόδους με τον πιο κάτω τύπο:

$$Z = \frac{\text{επιθυμητός χρόνος} - \text{αναμενόμενος χρόνος}}{\text{τυπική απόκλιση}} = \left(\frac{X - \mu}{\sigma} \right)$$

Πιθανότητα να ολοκληρωθεί το έργο το πολύ σε 50 βδομάδες;

- ◆ Η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με το εμβαδόν της σκιασμένης επιφάνειας κάτω από την κανονική καμπύλη.
- ◆ Από την Στατιστική ξέρουμε ότι η τυπική καθαρή τιμή z μιας στοχαστικής μεταβλητής X που ακολουθεί την κανονική κατανομή και έχει ($\mu=T$) και τυπική απόκλιση (σ) ισούται με

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$



Η εξίσωση αυτή δείχνει πόσες τυπικές αποκλίσεις από τη μέση τιμή μ προς τα δεξιά της είναι το σημείο z .

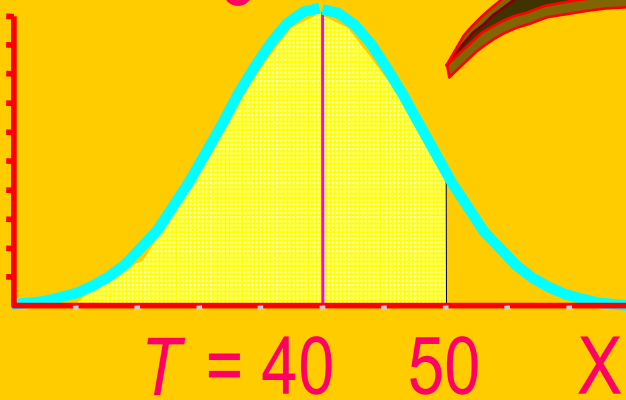
Μετατροπή σε τυπικές μεταβλητές

Αρ. τυπικών αποκλίσεων
από μέση (T) προς τα δεξιά

$$z = \frac{X - T}{\sigma} = \frac{50 - 40}{5} = 2,0$$

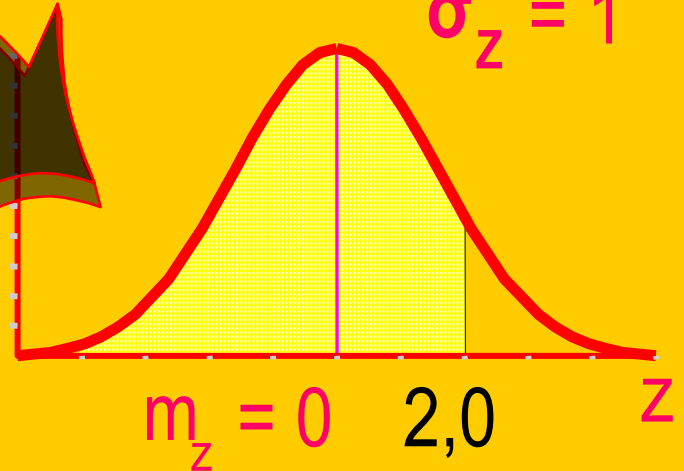
Κανονική
Κατανομή

$\sigma = 5$



Τυποποίηση Κανονικής
Κατανομής

$\sigma_z = 1$



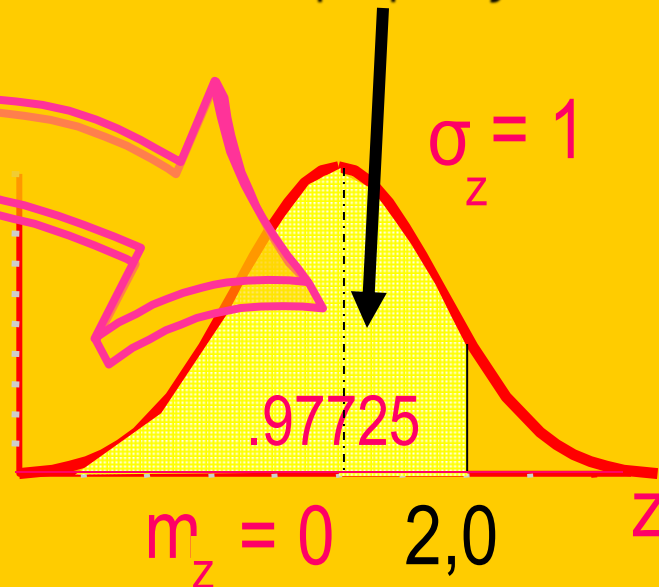
Εξάγοντας την πιθανότητα

Πίνακας τυπικής κανονικής
καμπύλης (τμήμα του πίνακα)

Z	,00	,01	,02
0,0	,50000	,50399	,50798
:	:	:	:
2,0	,97725	,97784	,97831
2,1	,98214	,98257	,98300

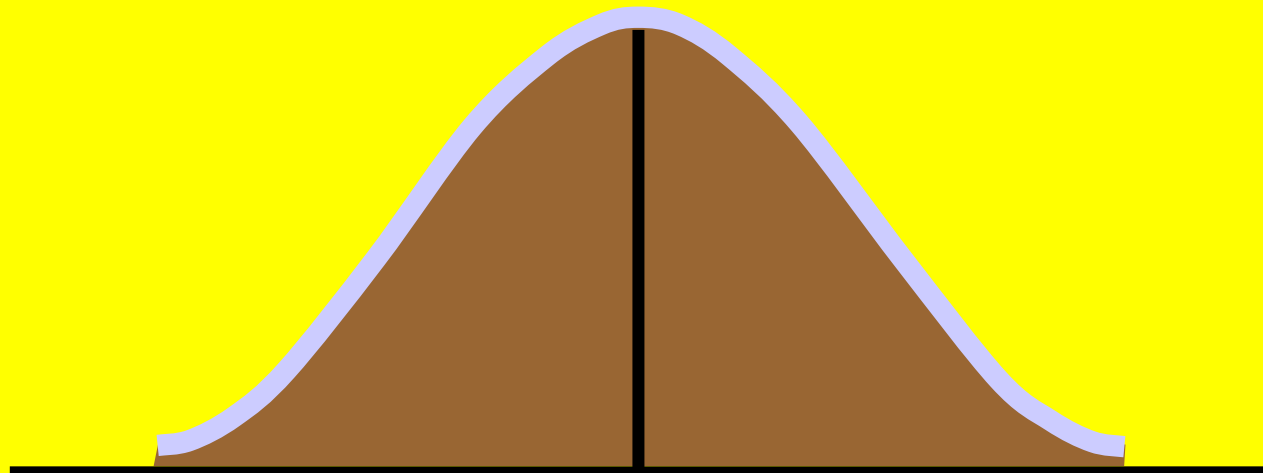
Πιθανότητες

Πιθανότητα
ολοκλήρωσης το πολύ
σε 50 βδομάδες



Πιθανότητα ολοκλήρωσης του έργου «Ανάπτυξη ΟΠΣΥ»

Τυπική απόκλιση = 1,76 βδομάδες



15 βδομάδες

(Αναμενόμενος χρόνος ολοκλήρωσης)

Πιθανότητα ολοκλήρωσης του έργου «Ανάπτυξη ΟΠΣΥ»

Ποιά είναι η πιθανότητα το έργο να ολοκληρωθεί σε 16 βδομάδες ή νωρίτερα;

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{16 - 15}{1,76} = 0,57$$

Από τους στατιστικούς πίνακες μπορούμε να βρούμε ποια πιθανότητα αντιστοιχεί σε τιμή z

Πιθανότητα ολοκλήρωσης του έργου «Ανάπτυξη ΟΠΣΥ»

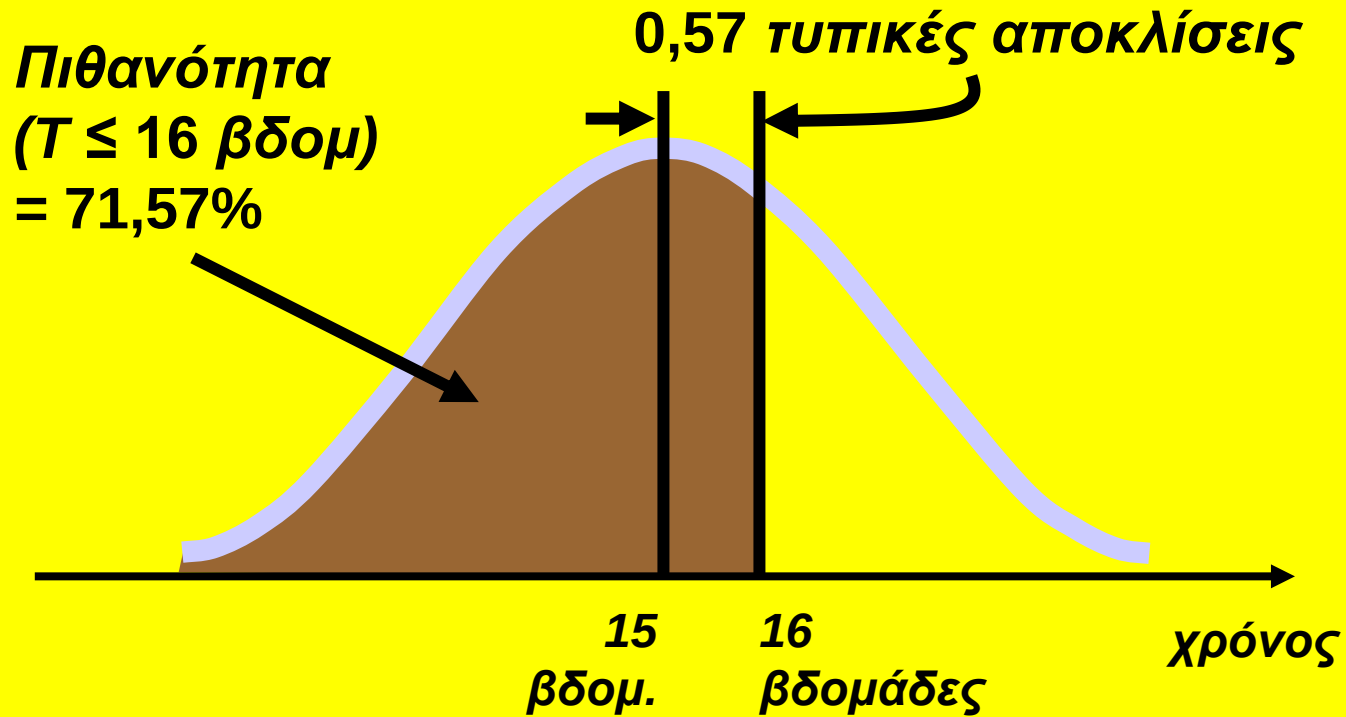
Στατιστικοί πίνακες κανονικής κατανομής

	,00	,01	}}		,07	,08
,1	,50000	,50399			,52790	,53188
,2	,53983	,54380			,56749	,57142
≈						
,5	,69146	,69497			,71566	,71904
,6	,72575	,72907			,74857	,75175

= 0,57

Όπου το Z είναι ο αριθμός των τυπικών αποκλίσεων που απέχει η προθεσμία που θέσαμε από τη μέση ή την αναμενόμενη ημερομηνία ολοκλήρωσης

Πιθανότητα ολοκλήρωσης του έργου «Ανάπτυξη ΟΠΣΥ»



Τί εξασφαλίσαμε μέχρι τώρα ως υπεύθυνοι των λειτουργιών

- ☒ ***Ο αναμενόμενος χρόνος ολοκλήρωσης του έργου είναι 15 βδομάδες***
- ☒ ***Υπάρχει μια πιθανότητα ίση με 71,57% το έργο να ολοκληρωθεί σε 16 βδομάδες***
- ☒ ***Πέντε δραστηριότητες (A, C, E, G, & H) βρίσκονται επί της κρίσιμης διαδρομής***
- ☒ ***Τρεις δραστηριότητες (B, D, F) δεν βρίσκονται επί της κρίσιμης διαδρομής και έχουν περιθώριο χαλάρωσης***
- ☒ ***Ένα λεπτομερές χρονοδιάγραμμα των δραστηριοτήτων είναι διαθέσιμο***

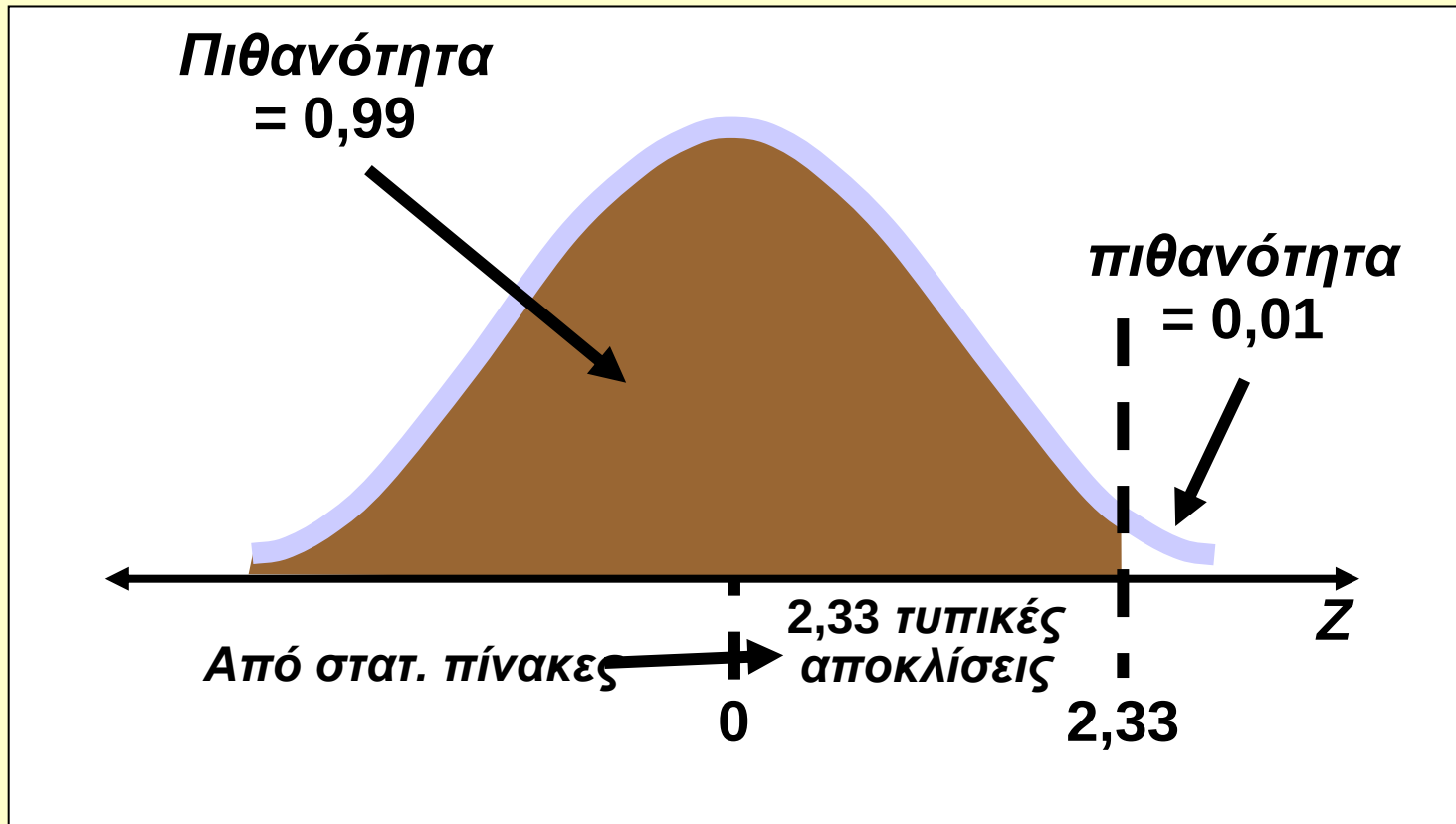
Αναμενόμενη διάρκεια ενός έργου για αυγκεκριμένο επίπεδο βεβαιότητας.

Ποιά είναι η αναμενόμενη διάρκεια του έργου για
την οποία έχουμε 99% πιθανότητα ολοκλήρωσης;



Αναμενόμενη διάρκεια ενός έργου για αυγκεκριμένο επίπεδο βεβαιότητας.

Ποιά είναι η αναμενόμενη διάρκεια του έργου για την οποία έχουμε 99% πιθανότητα ολοκλήρωσης;



Αναμενόμενη διάρκεια ενός έργου για αυγκεκριμένο επίπεδο βεβαιότητας.

Ποια είναι η αναμενόμενη διάρκεια του έργου για
την οποία έχουμε 99% πιθανότητα ολοκλήρωσης;

Ψάχνουμε το X στον πιο κάτω τύπο:

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma} \Rightarrow X = \mu + z \cdot \sigma$$

$$X = 15 + (2,33) \times (1,76) = 19 \text{ βδ.}$$

**Άρα, για πιθανότητα ολοκλήρωσης του έργου 99%,
η αναμενόμενη διάρκεια του είναι 19 βδομάδες.**

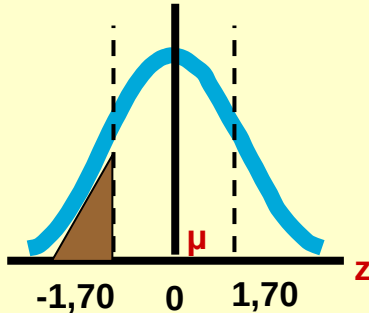
Ποιά είναι η πιθανότητα το έργο να ολοκληρωθεί το πολύ σε 12 βδομάδες;

Ποιά είναι η πιθανότητα το έργο να ολοκληρωθεί το πολύ σε 12 βδομάδες;

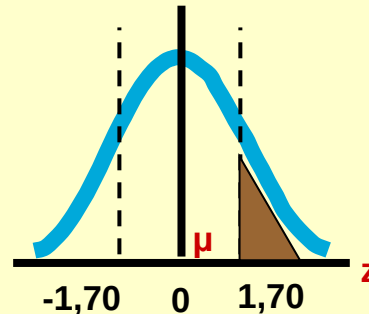
$$z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{12 - 15}{1,76} = -1,704$$

Ποιά είναι η πιθανότητα το έργο να ολοκληρωθεί το πολύ σε 12 βδομάδες;

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{12 - 15}{1,76} = -1,704$$



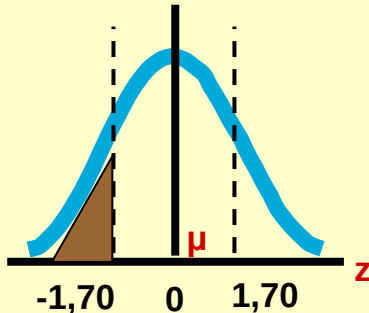
=



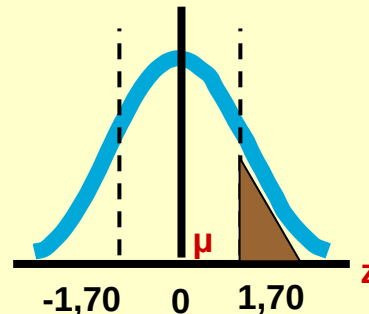
Τυπική κανονική
κατανομή

Ποιά είναι η πιθανότητα το έργο να ολοκληρωθεί το πολύ σε 12 βδομάδες;

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{12 - 15}{1,76} = -1,704$$



=



Τυπική κανονική
κατανομή

♦ $P(X \leq 12) = P(z \leq -1,70) = P(z > 1,70) = 1 - P(z \leq 1,70) =$
 $= 1 - 0,9554 \approx 0,0446 \approx 4,46\%$

Σύνοψη: Ο αλγόριθμος PERT

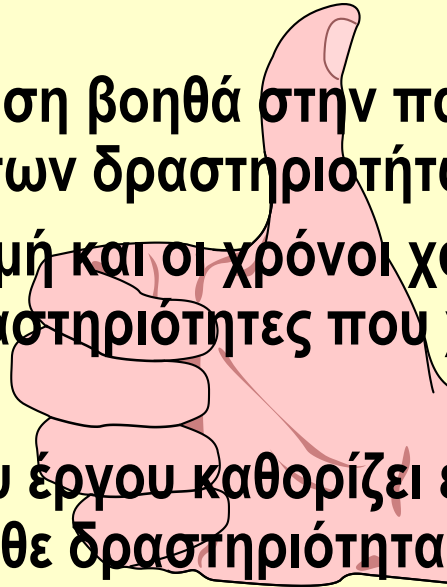
1. Για κάθε εργασία j υπολόγισε την αναμενόμενη διάρκεια μ_j και τη διακύμανση της σ_j^2 .
2. Εφάρμοσε τη μέθοδο CPM για να υπολογίσεις τα μεγέθη χρονικού προγραμματισμού του έργου θεωρώντας ως διάρκειες των εργασιών τις τιμές μ_j .
3. Υπολόγισε τη διακύμανση και την τυπική απόκλιση του χρόνου ολοκλήρωσης του έργου.
4. Χρησιμοποίησε την εξίσωση $P(X \leq t) = P\left(z \leq \frac{t - \mu}{\sigma}\right)$ και τα στατιστικά στοιχεία του βήματος 3, για να υπολογίσεις την πιθανότητα το έργο να περατωθεί πριν από την επιθυμητή προθεσμία.

Μεταβλητότητα χρόνου ολοκλήρωσης για τις μη κρίσιμες διαδρομές

- ◆ Όταν εντοπισθεί η πιθανότητα ολοκλήρωσης του έργου σε συγκεκριμένο χρόνο θα πρέπει επίσης να υπολογίζεται η **διακύμανση** στις χρονικές διάρκειες των **δραστηριοτήτων** που κείνται σε **μη-κρίσιμες διαδρομές**
- ◆ Η διακύμανση τέτοιων δραστηριοτήτων μπορεί να επιφέρει προβλήματα και αλλαγές στην κρίσιμη διαδρομή.

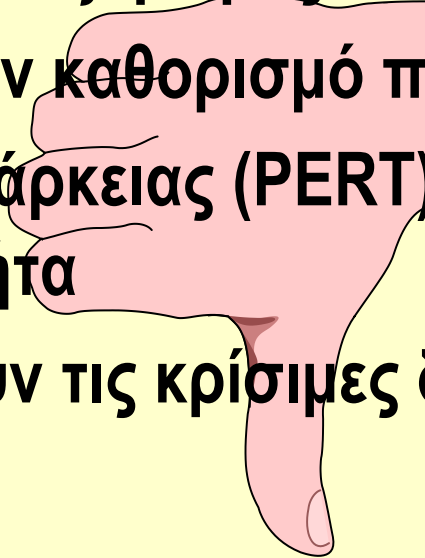
Πλεονεκτήματα PERT/CPM

- ♦ Πολύ χρήσιμες για προγ/σμό και έλεγχο μεγάλων έργων.
- ♦ Εύκολες στην υλοποίηση χωρίς μαθηματικές πολυπλοκότητες.
- ♦ Η δικτυακή ανάλυση βοηθά στην παρακολούθηση των σχέσεων μεταξύ των δραστηριοτήτων.
- ♦ Η κρίσιμη διαδρομή και οι χρόνοι χαλαρότητας βοηθούν σημαντικά τις δραστηριότητες που χρειάζονται σοβαρή εποπτεία.
- ♦ Η τεκμηρίωση του έργου καθορίζει εύκολα ποιος είναι υπεύθυνος για κάθε δραστηριότητα.
- ♦ Είναι διαθέσιμες σε κάθε είδος έργου.
- ♦ Χρήσιμες στην εποπτεία χρονοπρογραμμάτων και κόστους.



Περιορισμοί των PERT/CPM

- ◆ Θεωρούν ότι δραστηριότητες είναι ξεκάθαρα ορισμένες, ανεξάρτητες και σταθερές
- ◆ Απαιτούν τον καθορισμό προτεραιοτήτων
- ◆ Οι χρόνοι διάρκειας (PERT) ακολουθούν την κατανομή βήτα
- ◆ Υπερτονίζουν τις κρίσιμες διαδρομές



Επιλογή μεταξύ PERT & CPM

- ♦ Η επιλογή εξαρτάται κυρίως από το είδος του έργου και τους αντικειμενικούς στόχους που έχει θέσει η Διοίκηση του έργου.
- ♦ Η PERT είναι κατάλληλη όταν υπάρχει μεγάλη αβεβαιότητα στην πρόβλεψη των χρόνων των δραστηριοτήτων και όταν είναι κρίσιμο να ελεγχθεί αποτελεσματικά το χρονοδιάγραμμα του έργου. π.χ. προγράμματα έρευνας και ανάπτυξης, IT έργα.
- ♦ Η μέθοδος CPM επιλέγεται όταν οι χρόνοι δραστηριοτήτων μπορούν να προβλεφθούν ικανοποιητικά. Π.χ. έργα κατασκευής ή συντήρησης.

Άσκηση 2

- Ποιά είναι η πιθανότητα το πιο κάτω έργο να ολοκληρωθεί σε 36 βδομάδες;

Δραστηριότητα	Προηγούμενη	a	m	b
A	-	1	3	5
B	-	4	5	12
C	A	2	3	10
D	A	1	8	9
E	D	1	2	3
F	E	1	3	5
G	D	2	4	6
H	G, F	10	17	18
I	B, C, E	6	13	14
J	I, H	1	2	3

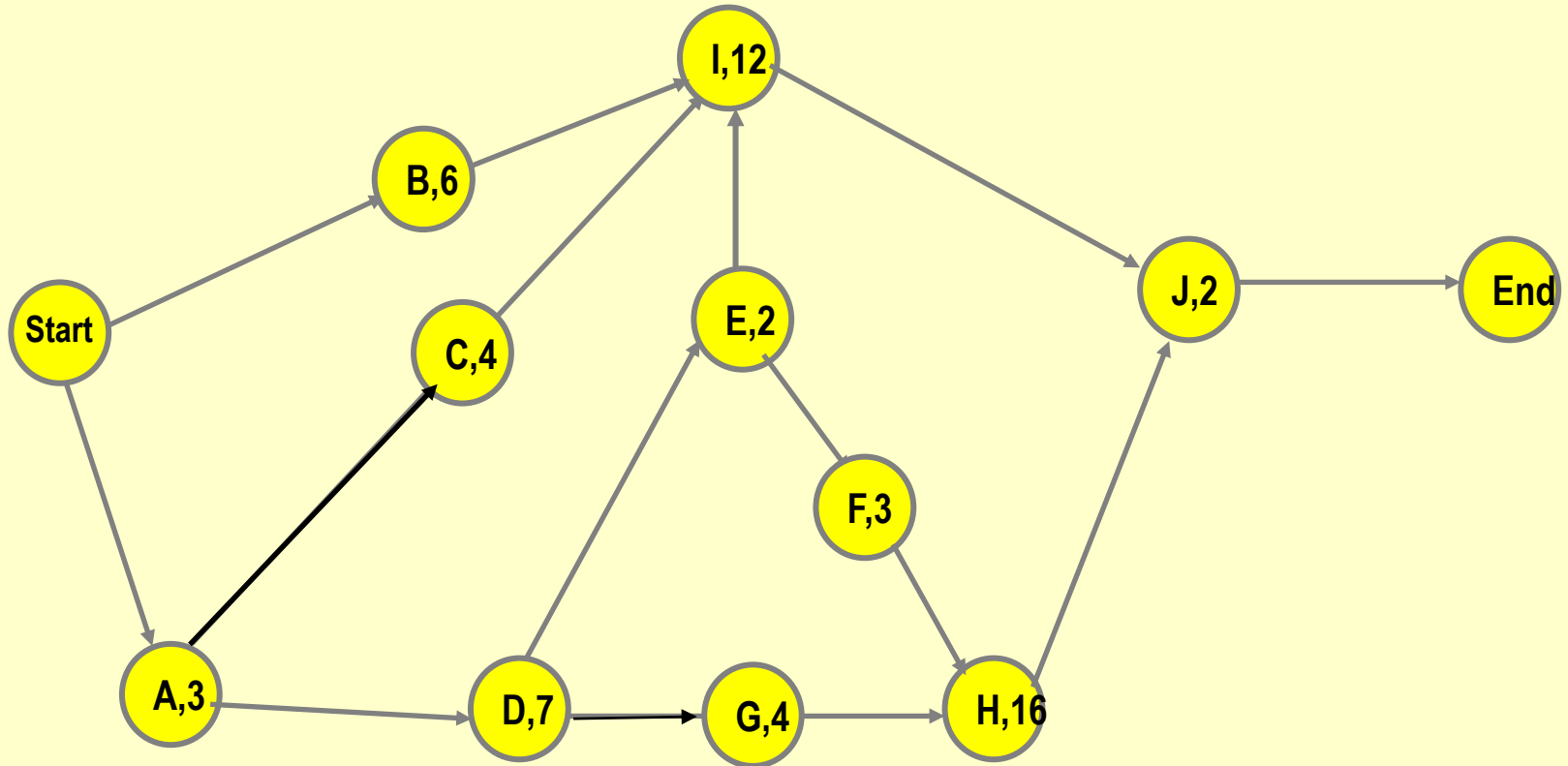
Αναμενόμενοι χρόνοι και διακύμανση

	a	m	b	t	σ^2
A	1	3	5	3	0.44
B	4	5	12	6	1.78
C	2	3	10	4	1.78
D	1	8	9	7	1.78
E	1	2	3	2	0.11
F	1	3	5	3	0.44
G	2	4	6	4	0.44
H	10	17	18	16	1.78
I	6	13	14	12	1.78
J	1	2	3	2	0.11

$$t = \frac{1 + 4 \times 3 + 5}{6} = 3$$

$$\sigma^2 = \left(\frac{12 - 4}{6} \right)^2 = 1.78$$

Το δίκτυο του έργου και οι χρόνοι



Κρίσιμη διαδρομή και αναμενόμενη διάρκεια

1. Κρίσιμη διαδρομή: **A-D-E-F-H-J**.
2. Ποια είναι η πιθανότητα το έργο να ολοκληρωθεί σε **36 βδομάδες**;

Επίλυση

Αναμενόμενη διάρκεια έργου:

Άθροισμα αναμενόμενων χρόνων των δραστηριοτήτων επί της κρίσιμης διαδρομής

$$\mu = 3+7+2+3+16+2 = 33 \text{ βδομάδες}$$

Διακύμανση του χρόνου ολοκλήρωσης του έργου

Άθροισμα των διακυμάνσεων επί της κρίσιμης διαδρομής

$$\sigma^2 = 0.44+1.78+0.11+0.44+1.78+0.11= 4.66$$

$$\sigma = 2.15$$

Επίλυση - συνέχεια

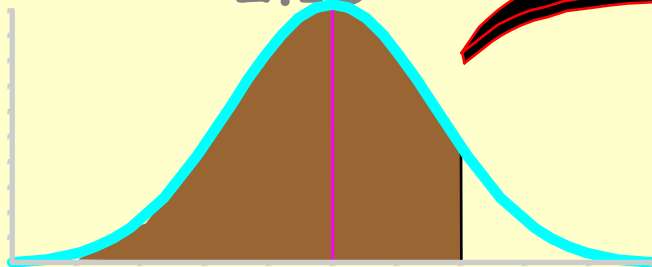
$$P(X \leq 36) = ?$$

$$P(Z \leq 1.4) = ?$$

$$z = \frac{T - \mu}{\sigma} = \frac{36 - 33}{2.15} = 1.4$$

Normal
Distribution

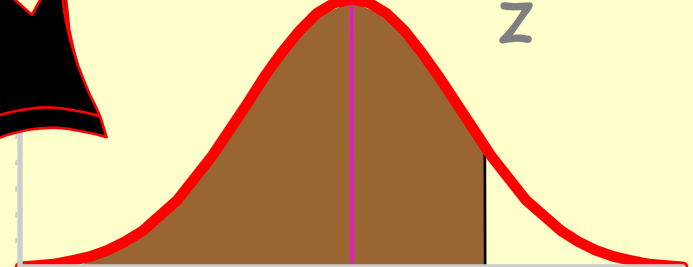
$\sigma = 2.15$



$\mu = 33$ 36 X

Standardized Normal Distribution

$\sigma_z = 1$



$\mu_z = 0$ 1.4 Z

Επίλυση - συνέχεια

Standardized Normal Probability Table

Z	.00	.01	.02
0.0	.5000	.5040	.5080
:	:	:	:
1.4	.9192	.9207	.9222
1.5	.9332	.9345	.9357

$$P(Z < 1.4) = 0.9192$$

