

# **1<sup>ο</sup> ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΛΥΜΕΝΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ**

**Στο μάθημα  
ΔΙΟΙΚΗΣΗ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΩΝ  
Κεφάλαιο: «Διοίκηση Έργων»**

**Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων  
Πανεπιστήμιο Πατρών**

**Ανδρέας Νεάρχου  
Καθηγητής**

# ΔΙΟΙΚΗΣΗ ΕΡΓΩΝ

## Άσκηση 1:

A) Να κατασκευαστεί το δίκτυο AON και το δίκτυο AOA για το πιο κάτω έργο:

Εργασία	Άμεσα Προηγούμενη	Διάρκεια (ημέρες)
A	-	2
B	A	1
C	A	3
D	B,C	1
E	D	2
F	D	3
G	E	2
H	G,F	2

B) Να εντοπιστεί η κρίσιμη διαδρομή και ο αναμενόμενος χρόνος εκτέλεσης του έργου.

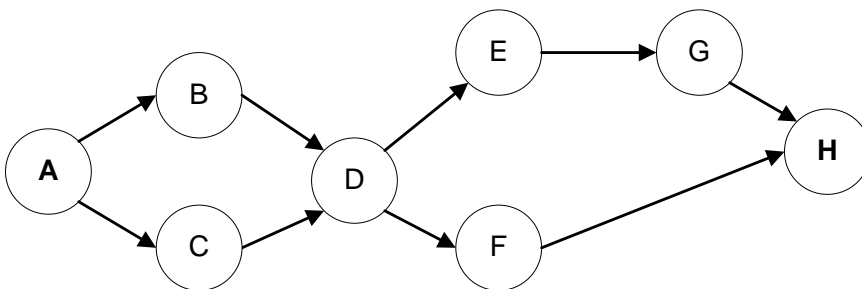
Γ) Να κατασκευαστεί το διάγραμμα Gantt για το έργο.

---

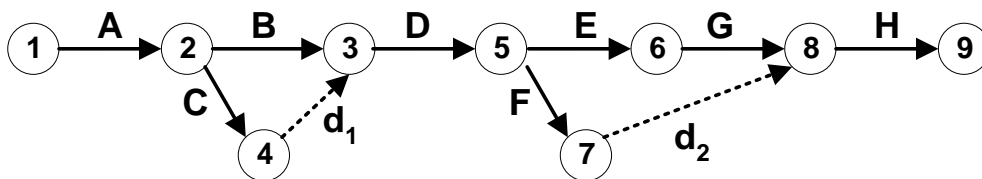
**ΛΥΣΗ:**

A)

**AON**



**AOA**



Για περισσότερα διαβάστε από το Βιβλίο «Χρονικός Προγραμματισμός στη Βιομηχανία και τις Υπηρεσίες» κεφ. 8.

B) Για τον εντοπισμό της κρίσιμης διαδρομής θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο CPM:

1<sup>ο</sup> βήμα: Υπολογισμός των χρόνων νωρίτερης έναρξης (NE) και νωρίτερης ολοκλήρωσης (NO).  
Πέρασμα προς τα μπρός.

Εργασία	Άμεσα Προηγούμενη	Διάρκεια	NE	NO	BE	BO	Π
A	-	2	0	2			
B	A	1	2	3			
C	A	3	2	5			
D	B,C	1	5	6			
E	D	2	6	8			
F	D	3	6	9			
G	E	2	8	10			
H	G,F	2	10	12			

2<sup>ο</sup> βήμα: Υπολογισμός των χρόνων βραδύτερης έναρξης (BE) και βραδύτερης ολοκλήρωσης (BO).  
Πέρασμα προς τα πίσω.

Εργασία	Άμεσα Προηγούμενη	Διάρκεια	NE	NO	BE	BO	Π
A	-	2	0	2	0	2	
B	A	1	2	3	4	5	
C	A	3	2	5	2	5	
D	B,C	1	5	6	5	6	
E	D	2	6	8	6	8	
F	D	3	6	9	7	10	
G	E	2	8	10	8	10	
H	G,F	2	10	12	10	12	

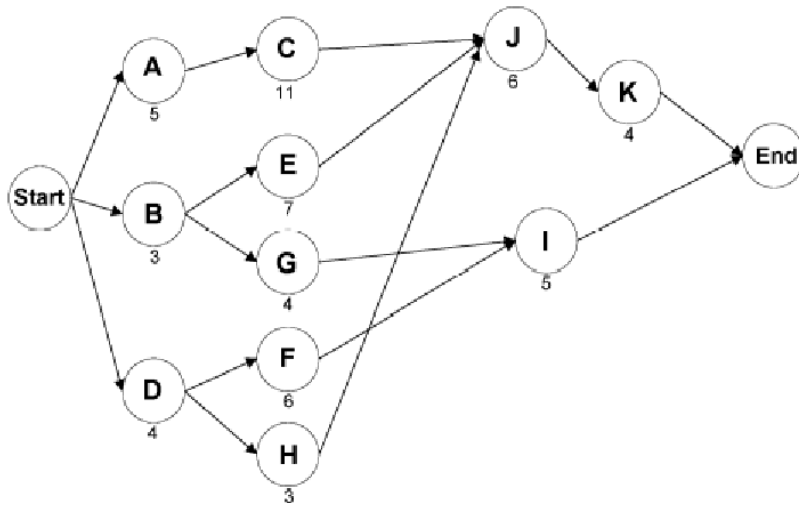
3<sup>ο</sup> βήμα: Υπολογισμός περιθωρίων (Π).  $\Pi = BE - NE$  ή  $\Pi = BO - NO$ .

Εργασία	Άμεσα Προηγούμενη	Διάρκεια	NE	NO	BE	BO	Π
A	-	2	0	2	0	2	0
B	A	1	2	3	4	5	2
C	A	3	2	5	2	5	0
D	B,C	1	5	6	5	6	0
E	D	2	6	8	6	8	0
F	D	3	6	9	7	10	1
G	E	2	8	10	8	10	0
H	G,F	2	10	12	10	12	0

Η κρίσιμη διαδρομή είναι εκείνη στην οποία όλες οι εργασίες έχουν περιθώριο μηδέν. Έτσι, από το πίνακα βλέπουμε ότι η κρίσιμη διαδρομή είναι η **A-C-D-E-G-H**. Η συνολική διάρκεια του έργου είναι η διάρκεια των δραστηριοτήτων επί της κρίσιμης διαδρομής. Δηλαδή είναι **12 ημέρες**.

## Άσκηση 2:

Έστω το πιο κάτω δίκτυο έργου. Οι αριθμοί κάτω από κάθε κύκλο καθορίζουν τη διάρκεια της αντίστοιχης εργασίας σε ημέρες..



1. Αναγνωρίστε τις κρίσιμες δραστηριότητες.
2. Ποια είναι η διάρκεια της κρίσιμης διαδρομής;
3. Πόσο είναι το περιθώριο χαλάρωσης της δραστηριότητας H;
4. Αν η δραστηριότητα I καθυστερήσει κατά 10 ημέρες ποια θα είναι η επίδραση στη συνολική διάρκεια του έργου;

### ΛΥΣΗ:

1. Για να εντοπίσουμε τις κρίσιμες δραστηριότητες θα πρέπει να βρούμε ποιες από αυτές έχουν μηδενικό περιθώριο χαλάρωσης. Αυτό σημαίνει ότι, πρέπει να εφαρμόσουμε τη μέθοδο CPM για να υπολογίσουμε χρόνους NE, NO, BE, BO. Έτσι, έχουμε τους εξής υπολογισμούς (υπό μορφή πίνακα):

**1<sup>ο</sup> βήμα:** Υπολογισμός των χρόνων νωρίτερης έναρξης (NE) και νωρίτερης ολοκλήρωσης (NO).

Εργασία	Άμεσα Προηγούμενη	Διάρκεια	NE	NO	BE	BO	Π
Start	-	0	0	0			
A	Start	5	0	5			
B	Start	3	0	3			
C	A	11	5	16			
D	Start	4	0	4			
E	B	7	3	10			
F	D	6	4	10			
G	B	4	3	7			
H	D	3	4	7			
I	G,F	5	10	15			
J	C,E,H	6	16	22			
K	J	4	22	26			
End	K,I	0	26	26			

**2<sup>ο</sup> βήμα:** Υπολογισμός των χρόνων βραδύτερης έναρξης (BE) και βραδύτερης ολοκλήρωσης (BO).

Εργασία	Άμεσα Προηγούμενη	Διάρκεια	NE	NO	BE	BO	Π
Start	-	0	0	0	<b>0</b>	<b>0</b>	
A	Start	5	0	5	<b>0</b>	<b>5</b>	
B	Start	3	0	3	<b>6</b>	<b>9</b>	
C	A	11	5	16	<b>5</b>	<b>16</b>	
D	Start	4	0	4	<b>9</b>	<b>13</b>	
E	B	7	3	10	<b>9</b>	<b>16</b>	
F	D	6	4	10	<b>15</b>	<b>21</b>	
G	B	4	3	7	<b>17</b>	<b>21</b>	
H	D	3	4	7	<b>13</b>	<b>16</b>	
I	G,F	5	10	15	<b>21</b>	<b>26</b>	
J	C,E,H	6	16	22	<b>16</b>	<b>22</b>	
K	J	4	22	26	<b>22</b>	<b>26</b>	
End	K,I	0	26	26	<b>26</b>	<b>26</b>	

**3<sup>ο</sup> βήμα:** Υπολογισμός περιθωρίων (Π).  $\Pi = BE - NE$  ή  $\Pi = BO - NO$ .

Εργασία	Άμεσα Προηγούμενη	Διάρκεια	NE	NO	BE	BO	Π
Start	-	0	0	0	0	0	<b>0</b>
A	Start	5	0	5	0	5	<b>0</b>
B	Start	3	0	3	6	9	<b>6</b>
C	A	11	5	16	5	16	<b>0</b>
D	Start	4	0	4	9	13	<b>9</b>
E	B	7	3	10	9	16	<b>6</b>
F	D	6	4	10	15	21	<b>11</b>
G	B	4	3	7	17	21	<b>14</b>
H	D	3	4	7	13	16	<b>9</b>
I	G,F	5	10	15	21	26	<b>11</b>
J	C,E,H	6	16	22	16	22	<b>0</b>
K	J	4	22	26	22	26	<b>0</b>
End	K,I	0	26	26	26	26	<b>0</b>

Άρα οι κρίσιμες δραστηριότητες είναι οι A, C, J, K.

2. Το μήκος της κρίσιμης διαδρομής είναι 26 ημέρες. Που σημαίνει ότι ο ελάχιστος χρόνος ολοκλήρωσης του έργου είναι σε 26 ημέρες.
3. Το περιθώριο χαλάρωσης της δραστηριότητας H είναι 9 ημέρες.

4. Αν η δραστηριότητα I καθυστερήσει κατά 10 ημέρες να ολοκληρωθεί αυτό δεν θα έχει καμιά επίδραση στη συνολική διάρκεια του έργου. Στην απάντηση αυτή καταλήγουμε αφού αναλύσουμε ξανά τη κρίσιμη διαδρομή του έργου θέτοντας όμως ως διάρκεια της δραστηριότητας I την καθυστέρηση των 10 ημερών. Δηλαδή, η διάρκεια της I θα είναι 15 ημέρες (αντί 5 που ήταν αρχικά). Ο τελικός πίνακας μετά την εφαρμογή της μεθόδου CPM είναι ο εξής:

Εργασία	Άμεσα Προηγούμενη	Διάρκεια	NE	NO	BE	BO	Π
Start	-	0	0	0	0	0	0
A	Start	5	0	5	0	5	0
B	Start	3	0	3	4	7	4
C	A	11	5	16	5	16	0
D	Start	4	0	4	1	5	1
E	B	7	3	10	9	16	6
F	D	6	4	10	5	11	1
G	B	4	3	7	7	11	4
H	D	3	4	7	13	16	9
I	G,F	<b>15</b>	10	25	11	26	1
J	C,E,H	6	16	22	16	22	0
K	J	4	22	26	22	26	0
End	K,I	0	26	26	26	26	0

### Άσκηση 3:

Έστω το πιο κάτω έργο. Οι χρόνοι είναι σε βδομάδες.

Δραστηριότητα	Άμεσα προηγούμενη	Αισιόδοξος χρόνος	Πιθανός	Απαισιόδοξος
A	--	5	11	14
B	--	3	3	9
C	--	6	10	14
D	A, B	3	5	7
E	B	4	6	11
F	C	6	8	13
G	D, E	2	4	6
H	F	3	3	9

Ζητούνται τα εξής:

1. Να υπολογιστεί ο αναμενόμενος χρόνος ολοκλήρωσης του έργου και η διακύμανση της κρίσιμης διαδρομής.
2. Ποια η πιθανότητα το έργο να ολοκληρωθεί σε λιγότερο από 28 βδομάδες;

---

#### ΛΥΣΗ:

1. Για να υπολογίσουμε τον αναμενόμενο χρόνο ολοκλήρωσης του έργου θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο PERT.

A) Πρώτα υπολογίζουμε τον αναμενόμενο χρόνο ολοκλήρωσης κάθε δραστηριότητας σύμφωνα με την σχέση

$$t = \mu = \frac{a + 4m + b}{6}$$

Όπου  $a$  =πλέον αισιόδοξος χρόνος,  $m$ =πιο πιθανός χρόνος,  $b$ =πλέον απαισιόδοξος χρόνος

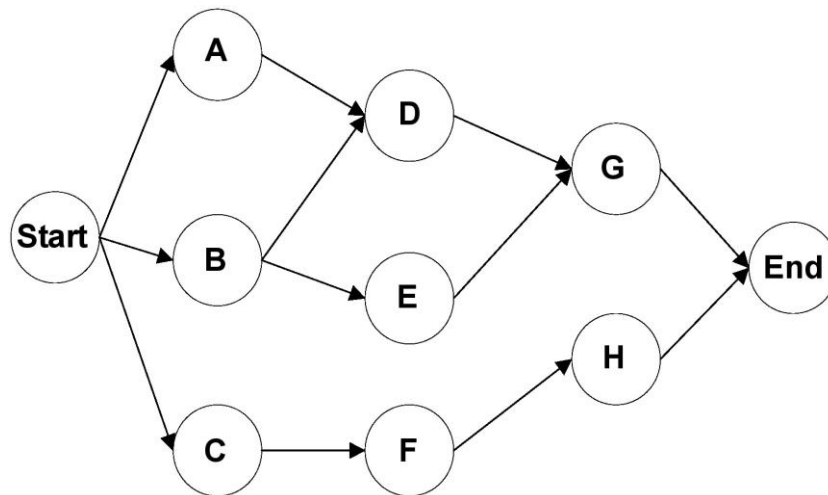
Δραστηριότητα	Άμεσα προηγούμενη	Αισιόδοξος χρόνος	Πιθανός	Απαισιόδοξος	$\mu$
A	--	5	11	14	10,5
B	--	3	3	9	4
C	--	6	10	14	10
D	A, B	3	5	7	5
E	B	4	6	11	6,5
F	C	6	8	13	8,5
G	D, E	2	4	6	4
H	F	3	3	9	4

B) Κατόπιν υπολογίζουνε τη διακύμανση κάθε δραστηριότητας σύμφωνα με την σχέση:

$$\sigma^2 = \left( \frac{b - a}{6} \right)^2$$

Δραστηριότητα	Άμεσα προηγούμενη	Αισιόδοξος χρόνος	Πιθανός	Απαισιόδοξος	$\mu$	$\sigma^2$
A	--	5	11	14	10,5	2,25
B	--	3	3	9	4	1
C	--	6	10	14	10	1,777778
D	A, B	3	5	7	5	0,444444
E	B	4	6	11	6,5	1,361111
F	C	6	8	13	8,5	1,361111
G	D, E	2	4	6	4	0,444444
H	F	3	3	9	4	1

Γ) Κατασκευάζουμε το δίκτυο του έργου και εφαρμόζουμε τη μέθοδο CPM για εύρεση της κρίσιμης διαδρομής θεωρώντας ως διάρκεια κάθε δραστηριότητας το μέσο αναμενόμενο χρόνο ( $\mu$ ). Έτσι, θα έχουμε:





**1<sup>ο</sup> βήμα:** Υπολογισμός των χρόνων νωρίτερης έναρξης (NE) και νωρίτερης ολοκλήρωσης (NO).

Δραστηριότητα	Άμεσα προηγούμενη	Διάρκεια (μ)	NE	NO	BE	BO	Π
Start	--	0	<b>0</b>	<b>0</b>			
A	--	10,5	<b>0</b>	<b>10,5</b>			
B	--	4	<b>0</b>	<b>4</b>			
C	--	10	<b>0</b>	<b>10</b>			
D	A, B	5	<b>10,5</b>	<b>15,5</b>			
E	B	6,5	<b>4</b>	<b>10,5</b>			
F	C	8,5	<b>10</b>	<b>18,5</b>			
G	D, E	4	<b>15,5</b>	<b>19,5</b>			
H	F	4	<b>18,5</b>	<b>22,5</b>			
End	--	0	<b>22,5</b>	<b>22,5</b>			

**2<sup>ο</sup> βήμα:** Υπολογισμός των χρόνων βραδύτερης έναρξης (BE) και βραδύτερης ολοκλήρωσης (BO).

Δραστηριότητα	Άμεσα προηγούμενη	Διάρκεια (μ)	NE	NO	BE	BO	Π
Start	--	0	0	0	<b>0</b>	<b>0</b>	
A	--	10,5	0	10,5	<b>3</b>	<b>13,5</b>	
B	--	4	0	4	<b>8</b>	<b>12</b>	
C	--	10	0	10	<b>0</b>	<b>10</b>	
D	A, B	5	10,5	15,5	<b>13,5</b>	<b>18,5</b>	
E	B	6,5	4	10,5	<b>12</b>	<b>18,5</b>	
F	C	8,5	10	18,5	<b>10</b>	<b>18,5</b>	
G	D, E	4	15,5	19,5	<b>18,5</b>	<b>22,5</b>	
H	F	4	18,5	22,5	<b>18,5</b>	<b>22,5</b>	
End	--	0	22,5	22,5	<b>22,5</b>	<b>22,5</b>	

**3<sup>ο</sup> βήμα:** Υπολογισμός περιθωρίων (Π).  $\Pi = BE - NE$  ή  $\Pi = BO - NO$ .

Δραστηριότητα	Άμεσα προηγούμενη	Διάρκεια (μ)	NE	NO	BE	BO	Π
Start	--	0	0	0	0	0	<b>0</b>
A	--	10,5	0	10,5	3	13,5	<b>3</b>
B	--	4	0	4	8	12	<b>8</b>
C	--	10	0	10	0	10	<b>0</b>
D	A, B	5	10,5	15,5	13,5	18,5	<b>3</b>
E	B	6,5	4	10,5	12	18,5	<b>8</b>
F	C	8,5	10	18,5	10	18,5	<b>0</b>
G	D, E	4	15,5	19,5	18,5	22,5	<b>3</b>
H	F	4	18,5	22,5	18,5	22,5	<b>0</b>
End	--	0	22,5	22,5	22,5	22,5	<b>0</b>

Έτσι, η απάντηση στο ερώτημα 1 της άσκησης είναι ότι ο αναμενόμενος χρόνος ολοκλήρωσης του έργου είναι 22,5 βδομάδες. Η διακύμανση της κρίσιμης διαδρομής είναι το άθροισμα των διακυμάνσεων των δραστηριοτήτων που κείνται επί της κρίσιμης διαδρομής;

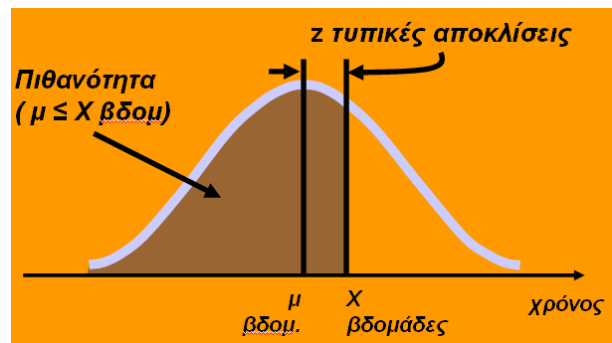
Επί της κρίσιμης διαδρομής βρίσκονται οι δραστηριότητες **C, F, H**.

$$\text{Άρα } \sigma^2_{\text{κρίσιμης διαδρομής}} = \sigma^2_{\text{C}} + \sigma^2_{\text{F}} + \sigma^2_{\text{H}} = 1,777778 + 1,361111 + 1 = \mathbf{4,138889}$$

Και η τυπική απόκλιση του έργου θα είναι  $\sqrt{4,138889} = 2,034426$

## 2. Ποια η πιθανότητα το έργο να ολοκληρωθεί σε λιγότερο από 28 βδομάδες;

Αυτό που τελικά ψάχνουμε είναι το κατάλληλο εμβαδόν κάτω από την καμπύλη της κανονικής κατανομής.



Η βασική κανονική εξίσωση έχει ως εξής:

$$z = \frac{\text{προθεσμία} - \text{αναμενόμενος χρόνος ολοκλήρωσης}}{\text{τυπική απόκλιση έργου}} = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

- $z$  = ο αριθμός των τυπικών αποκλίσεων που η προθεσμία απέχει από τον αναμενόμενο μέσο χρόνο ολοκλήρωσης του έργου
- $\mu$  η μέση διάρκεια του έργου =  $\sum$  (διάρκειας κάθε κρίσιμης δραστηριότητας) = 22,5 βδομάδες
- και  $\sigma$  η τυπική απόκλιση του έργου = 2,034426 βδομάδες.

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{28 - 22,5}{2,034426} = 2,7034653$$

Από τους στατιστικούς πίνακες (εμβαδόν κανονικής κατανομής) έχουμε πιθανότητα ίση με 0,9968 το έργο να ολοκληρωθεί σε λιγότερο από 28 βδομάδες. Δηλαδή, έχουμε σχεδόν βεβαιότητα ότι το έργο θα ολοκληρωθεί σε λιγότερο από 28 βδομάδες.

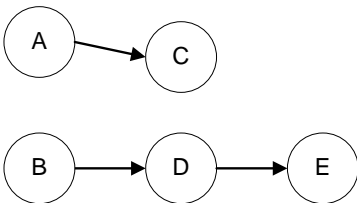
#### Άσκηση 4:

Για το πιο κάτω έργο να υπολογιστεί το ελάχιστο κόστος που απαιτείται για τη συμπίεση του έργου κατά 3 μήνες.

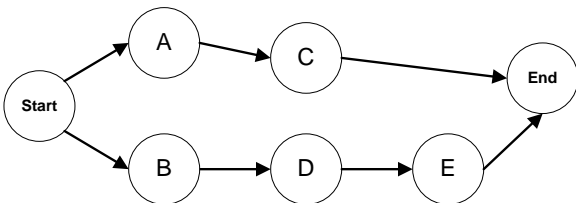
Δραστηριότητα	Άμεσα προηγούμενη	Κανονικός Χρόνος (μήνες)	Χρόνος συμπίεσης (μήνες)	Κανονικό κόστος (€)	Κόστος συμπίεσης (€)
A	--	6	4	2000	2400
B	--	7	5	3000	3500
C	A	7	6	1000	1300
D	B	6	4	2000	2600
E	D	9	8	8800	9000

#### ΛΥΣΗ:

Το δίκτυο για το συγκεκριμένο έργο θα είναι το εξής:



Όμως, επειδή θα πρέπει να υπάρχει ένας κόμβος αρχής και ένας κόμβος τέλους, Το δίκτυο θα έχει τελικά την μορφή:



Αφού φτιάξαμε το δίκτυο του έργου μπορούμε να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο συμπίεσης έργων.

**Βήμα 1<sup>ο</sup>** : Υπολογισμός κόστους συμπίεσης ανά χρονική περίοδο (εδώ ανά μήνα) σύμφωνα με την σχέση:

$$\text{Κόστος συμπίεσης ανά περίοδο} = \frac{(\text{Κόστος συμπίεσης} - \text{Κανονικό κόστος})}{(\text{Κανονικός χρόνος} - \text{Χρόνος συμπίεσης})}$$

Έτσι, το κόστος συμπίεσης ανά μήνα κάθε δραστηριότητας θα είναι (βλέπε τελευταία στήλη του πίνακα πιο κάτω):

Δραστηριότητα	Άμεσα προηγούμενη	Κανονικός Χρόνος (μήνες)	Χρόνος συμπίεσης (μήνες)	Κανονικό κόστος (€)	Κόστος συμπίεσης (€)	Κόστος συμπίεσης ανά περίοδο
A	--	6	4	2000	2400	<b>200</b>
B	--	7	5	3000	3500	<b>250</b>
C	A	7	6	1000	1300	<b>300</b>
D	B	6	4	2000	2600	<b>300</b>
E	D	9	8	8800	9000	<b>200</b>

**Βήμα 2<sup>ο</sup>** : Εντοπισμός κρίσιμης διαδρομής:

Έχουμε δύο αλληλουχίες (διαδρομές που συνδέουν τον κόμβο αρχής με το τελικό κόμβο):

- (α) την **A-C** με συνολική διάρκεια 13 μήνες
- (β) την **B-D-E** με συνολική διάρκεια 22 μήνες.

Έτσι, η κρίσιμη διαδρομή είναι η **B-D-E**.

**Βήμα 3<sup>ο</sup>** : Συμπίεσης δραστηριότητας:

Από την κρίσιμη διαδρομή εντοπίζω εκείνη την δραστηριότητα που έχει το μικρότερο κόστος συμπίεσης ανά περίοδο και έχει περιθώριο συμπίεσης. **Συμπιέζω την δραστηριότητα αυτή κατά 1 περίοδο.**

Έτσι, σύμφωνα με τον πιο πάνω πίνακα η δραστηριότητα **E** έχει το μικρότερο κόστος και μπορεί να συμπίεστεί κατά 1 μήνα με κόστος 200€. Άρα **συμπιέζουμε την E κατά 1 μήνα με κόστος 200€.**

**Βήμα 4<sup>ο</sup>** : Ενημέρωση χρόνων:

Η E έχει τώρα διάρκεια 8 μήνες και η κρίσιμη διαδρομή έχει διάρκεια 21 μήνες.

Επαναλαμβάνοντας από το 2<sup>ο</sup> βήμα την ίδια λογική μέχρι το έργο να έχει διάρκεια 19 μήνες έχουμε τα εξής:

**2<sup>η</sup> επανάληψη:**

- Η κρίσιμη διαδρομή είναι και πάλι η **B-D-E** με συνολική διάρκεια 21 μήνες.
- Η E δεν έχει άλλο περιθώριο συμπίεσης, άρα θα **συμπιέσουμε την B κατά 1 μήνα με κόστος 250€.**
- Η κρίσιμη διαδρομή έχει τώρα διάρκεια 20 μήνες.

### 3<sup>η</sup> επανάληψη:

- Η κρίσιμη διαδρομή είναι και πάλι η **B-D-E** με συνολική διάρκεια 20 μήνες.
- Η δραστηριότητα B έχει τώρα διάρκεια 6 μήνες. Έχει περιθώριο κι άλλης συμπίεσης. Έτσι, συμπιέζουμε εκ νέου την B κατά 1 μήνα με κόστος 250€.
- Το έργο μας έχει τώρα συνολικό χρόνο ολοκλήρωσης 19 μήνες που ήταν και το ζητούμενο.

Η τελική λύση συνοψίζεται στα εξής:

Δραστηριότητα	Μήνες συμπίεσης	Κόστος συμπίεσης (€)
E	1	200
B	2	500
	Συνολικό κόστος=	700