2. Σύντομη Θεωρητική Εισαγωγή

2.1 Συστήματα Αρίθμησης

2.1.1 Εισαγωγή στα Αριθμητικά Συστήματα

Ένα Αριθμητικό Σύστημα αποτελείται από ένα σύνολο ψηφίων, ένα σύνολο συμβόλων (πράξεων) και τους κανόνες εκτέλεσης των πράξεων ανάμεσα στους αριθμούς με βάση τα ψηφία αυτά.

Βάση (base) ενός Αριθμητικού Συστήματος είναι ένας ακέραιος αριθμός b, ο οποίος χαρακτηρίζει το σύστημα και ο οποίος είναι ίσος με το πλήθος των διαφορετικών ψηφίων του συστήματος.

Τα πιο συχνά χρησιμοποιούμενα συστήματα είναι το δεκαδικό (με βάση το 10), το οποίο χρησιμοποιούμε στην καθημερινή ζωή, το δυαδικό (με βάση το 2), το οκταδικό (με βάση το 8) και το δεκαεξαδικό (με βάση το 16).

Η γνώση του δυαδικού συστήματος είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην κατανόηση των αρχών λειτουργίας των υπολογιστικών συστημάτων, διότι η απεικόνιση της πληροφορίας και οι πράξεις στους υπολογιστές μπορούν να αναπαρασταθούν με το δυαδικό σύστημα αρίθμησης, καθώς οι υπολογιστές χρησιμοποιούν την ψηφιακή λογική. Το δεκαεξαδικό σύστημα, από την άλλη μεριά, έχει το πλεονέκτημα ότι υπάρχει ένας εύκολος τρόπος μετατροπής των αριθμών από το δυαδικό στο δεκαεξαδικό σύστημα και αντίστροφα, ενώ το πλήθος των ψηφίων ενός αριθμού στο δεκαεξαδικό σύστημα είναι πολύ μικρότερο από το πλήθος των ψηφίων του ίδιου αριθμού στο δυαδικό σύστημα. Έτσι, συχνά στους υπολογιστές αντί να αναφέρουμε τη δυαδική αναπαράσταση ενός αριθμού χρησιμοποιούμε για πρακτικούς λόγους τη δεκαεξαδική αναπαράσταση. Στον επόμενο πίνακα φαίνονται τα ψηφία τα οποία χρησιμοποιούνται σε κάθε ένα από τα συστήματα αυτά.

Δυαδικό σύστημα	**Οκταδικό σύστημα**	**Δεκαδικό σύστημα**	**Δεκαεξαδικό σύστημα**
0 **1**	**0** **1** **2** **3** **4** **5** **6** **7**	**0** **1** **2** **3** **4** **5** **6** **7** **8** **9**	**0** **1** **2** **3** **4** **5** **6** **7** **8** **9** **A** **B** **C** **D** **E** **F**

Τα ψηφία A, B, C, D, E, F χρησιμοποιούνται στο δεκαεξαδικό σύστημα για να εκφράσουν τους αριθμούς 10, 11, 12, 13, 14, 15, για τους οποίους δεν υπάρχουν αντίστοιχα ψηφία στο δεκαδικό σύστημα.

Η γενική μορφή παράστασης ενός αριθμού σε ένα Αριθμητικό σύστημα είναι:

$$a_{m-1}a_{m-2}\ldots a_1a_0\,,\,a_{-1}a_{-2}\ldots a_{-n}$$

όπου οι αριθμοί m και n αναφέρονται σε θέσεις ψηφίων. Τα ψηφία a_{m-1}, a_{m-2}, …, a_1 και a_0 είναι το ακέραιο μέρος του αριθμού, ενώ τα a_{-1}, a_{-2}, …, a_{-n} είναι το κλασματικό του μέρος.

Όταν η βάση του Αριθμητικού Συστήματος είναι b, τότε η αξία του αριθμού (δηλαδή, η αντίστοιχη τιμή στο Δεκαδικό Σύστημα Αρίθμησης) είναι:

$$N = a_{m-1}\, b^{m-1} + a_{m-2}\, b^{m-2} + \ldots\, a_1\, b^1 + a_0\, b^0 + a_{-1}\, b^{-1} + a_{-2}\, b^{-2} + \ldots\, a_{-n}\, b^{-n}$$

Ένας αριθμός X μπορεί να εκφραστεί σε οποιοδήποτε Αριθμητικό Σύστημα με βάση β. Για αυτή την έκφραση, χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $(X)_\beta$. Είναι δυνατό να επιβεβαιώσει κανείς ότι ο ίδιος αριθμός εκφράζεται με διαφορετικές ακολουθίες ψηφίων σε άλλα Συστήματα Αρίθμησης, όπως φαίνεται στα πιο κάτω παραδείγματα που αφορούν στον αριθμό 28 του Δεκαδικού Συστήματος.

$$(28)_{10} = 2\times10^1 + 8\times10^0$$

$$(34)_8 = 3\times8^1 + 4\times8^0 = (28)_{10}$$

$$(1C)_{16} = 1\times16^1 + 12\times16^0 = (28)_{10}$$

$$(11100)_2 = 1\times2^4 + 1\times2^3 + 1\times2^2 + 0\times2^1 + 0\times2^0 = (28)_{10}$$

Αντίστροφα, η ίδια ακολουθία ψηφίων μπορεί να συμβολίζει διαφορετικούς αριθμούς σε διαφορετικά συστήματα, για παράδειγμα,

$$(11)_{16} = 1\times16^1 + 1\times16^0 = 16 + 1 = (17)_{10}$$

$$(11)_8 = 1\times8^1 + 1\times8^0 = (9)_{10}$$

$$(11)_2 = 1\times2^1 + 1\times2^0 = 2 + 1 = (3)_{10}$$

2.2 Μετατροπή αριθμών από ένα Σύστημα Αρίθμησης σε άλλο

Στην παράγραφο αυτή θα αναφερθούμε στις διαδικασίες μετατροπής ενός αριθμού από ένα Σύστημα Αρίθμησης σε κάποιο άλλο.

2.2.1 Μετατροπή από οποιοδήποτε Σύστημα Αρίθμησης στο Δεκαδικό Σύστημα

Για να μετατρέψουμε έναν αριθμό από οποιοδήποτε σύστημα στο δεκαδικό, υπολογίζουμε την τιμή της παράστασης (η υποδιαστολή βρίσκεται μεταξύ των ψηφίων a_0 και a_{-1}).

$$a_{m-1}\, b^{m-1} + a_{m-2}\, b^{m-2} + \ldots\, a_1\, b^1 + a_0\, b^0 + a_{-1} b^{-1} + a_{-2} b^{-2} + \ldots + a_{-n} b^{-n}$$

όπου με b συμβολίζουμε τη βάση του συστήματος.

Για παράδειγμα, για να μετατρέψουμε τον αριθμό $(11001)_2$ στο δεκαδικό σύστημα, υπολογίζουμε την τιμή της παράστασης:

$$1\times2^4 + 1\times2^3 + 0\times2^2 + 0\times2^1 + 1\times2^0 = 16+8+1 = (25)_{10}$$

Για να μετατρέψουμε τον αριθμό $(11,01)_2$ στο δεκαδικό σύστημα, τότε θα έχουμε:

$$1\times2^1 + 1\times2^0 + 0\times2^{-1} + 1\times2^{-2} = 3 + 0,25 = (3,25)_{10}$$

Για να μετατρέψουμε τον αριθμό $(45,34)_8$ από το οκταδικό σύστημα προς το δεκαδικό, υπολογίζουμε την τιμή της παράστασης:

$$4\times8^1 + 5\times8^0 + 3\times8^{-1} + 4\times8^{-2} = 32 + 5 + 0,375 + 0,0625 = (37,4375)_{10}$$

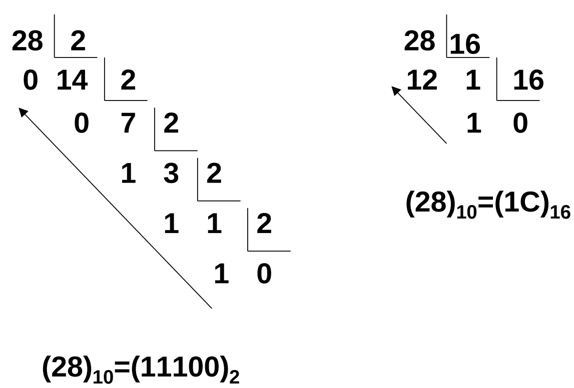
2.2.2 Μετατροπή από το Δεκαδικό σε οποιοδήποτε άλλο Σύστημα Αρίθμησης

Η μετατροπή αυτή γίνεται σε δυο φάσεις. Στην πρώτη φάση μετατρέπεται το ακέραιο μέρος του αριθμού, ενώ στη δεύτερη μετατρέπεται το κλασματικό μέρος.

Μετατροπή ακεραίου μέρους

Για να μετατρέψουμε το ακέραιο μέρος του αριθμού, το διαιρούμε με τη βάση του συστήματος, b, και παίρνουμε ένα υπόλοιπο (Υ) και ένα πηλίκο (Π). Το πηλίκο διαιρείται και πάλι με το b και παίρνουμε ένα νέο πηλίκο Π και υπόλοιπο Υ. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται μέχρι το πηλίκο Π να γίνει 0. Η ζητούμενη αναπαράσταση είναι τα υπόλοιπα (Υ), με την αντίστροφη σειρά από εκείνη που τα βρήκαμε.

Για παράδειγμα, στο Σχήμα 1 φαίνεται η διαδικασία μετατροπής του αριθμού 28 στο δυαδικό και το δεκαεξαδικό σύστημα αντίστοιχα. Οι αναπαραστάσεις του δεκαδικού αριθμού 28 στα δύο συστήματα είναι $(11100)_2$ και $(1C)_{16}$. Στη μετατροπή στο δεκαεξαδικό σύστημα, το 12, μετατρέπεται στο ψηφίο C στο οποίο και αντιστοιχεί.



Σχήμα 1: Μετατροπή του αριθμού $(28)_{10}$ στο Δυαδικό και το Δεκαεξαδικό Σύστημα Αρίθμησης

Μετατροπή κλασματικού μέρους

Για τη μετατροπή του κλασματικού μέρους ενός δεκαδικού αριθμού σε οποιοδήποτε σύστημα με βάση b, εργαζόμαστε ως εξής: πολλαπλασιάζουμε τον αριθμό επί b. Σημειώνουμε το ακέραιο μέρος του αποτελέσματος και με το κλασματικό μέρος επαναλαμβάνουμε την προηγούμενη διαδικασία. Η διαδικασία συνεχίζεται έως ότου βρούμε στο κλασματικό μέρος του αριθμού το 0 ή (αν αυτό δε γίνει) μέχρι να φτάσουμε στην επιθυμητή ακρίβεια (π.χ. 3 κλασματικά δυαδικά ψηφία). Για το αποτέλεσμα παίρνουμε τα ψηφία που βρήκαμε στο ακέραιο μέρος κάθε πράξης.

Παράδειγμα: Να μετατραπεί ο αριθμός $(0{,}375)_{10}$ στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης. Η διαδικασία φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα.

αριθμός	πολλαπλασιασμός επί 2	αποτέλεσμα	ακέραιο μέρος	κλασματικό μέρος
0,375	×2	0,75	0	0,75
0,75	×2	1,5	1	0,5
0,5	×2	1	1	0

Με βάση τον παραπάνω πίνακα, φτάσαμε σε αποτέλεσμα με κλασματικό μέρος 0. Επομένως η διαδικασία ολοκληρώθηκε και το αποτέλεσμα είναι $(0{,}375)_{10} = (0{,}011)_2$.

Παράδειγμα: Να μετατραπεί ο αριθμός $(0{,}4276)_{10}$ στο δυαδικό σύστημα. Αν χρειαστεί, να σταματήσει η διαδικασία στο 5^{o} κλασματικό ψηφίο.

Η διαδικασία φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα.

αριθμός	πολλαπλασιασμός επί 2	αποτέλεσμα	ακέραιο μέρος	κλασματικό μέρος
0,4276	×2	0,8552	0	0,8552
0,8552	×2	1,7104	1	0,7104
0,7104	×2	1,4208	1	0,4208
0,4208	×2	0,8416	0	0,8416
0,8416	×2	1,6832	1	0,6832

Στο σημείο αυτό δεν έχουμε φτάσει σε αποτέλεσμα με 0 στο κλασματικό μέρος, επομένως προβαίνουμε σε στρογγυλοποίηση του αριθμού και μπορούμε να απαντήσουμε ότι $(0{,}4276)_{10} = (0{,}01101)_2$. Αξίζει να σημειωθεί ότι, στην πραγματικότητα, ο αριθμός που βρήκαμε είναι διαφορετικός από τον αρχικό. Πιο συγκεκριμένα, στο δεκαδικό σύστημα ο αριθμός που βρήκαμε είναι ο:

$$0\times2^{-1} + 1\times2^{-2} + 1\times2^{-3} + 0\times2^{-4} + 1\times2^{-5} = 0{,}25 + 0{,}125 + 0{,}03125 = (0{,}40625)_{10}$$

Η διαφορά αυτή (από το 0,4276 στο 0,40625) οφείλεται στο λάθος στρογγυλοποίησης και είναι τόσο μικρότερη όσο πιο πολλά δυαδικά ψηφία χρησιμοποιήσουμε.

Παράδειγμα: Να μετατραπεί ο αριθμός $(0{,}701171825)_{10}$ στο οκταδικό σύστημα.

Η διαδικασία φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

αριθμός	πολλαπλασιασμός επί 8	αποτέλεσμα	ακέραιο μέρος	κλασματικό μέρος
0,701171825	×8	5,609374600	5	0,609374600
0,609374600	×8	4,874996800	4	0,874996800
0,874996800	×8	6,999974400	~7	~0,000000000

Και στο παράδειγμα αυτό, φτάσαμε (κατά προσέγγιση) σε αποτέλεσμα με κλασματικό μέρος 0. Επομένως η διαδικασία ολοκληρώθηκε, και το αποτέλεσμα είναι $(0{,}701171825)_{10} = (0{,}547)_8$.

2.2.3 Μετατροπή από δυαδικό σε δεκαεξαδικό και αντίστροφα

Υπάρχουν δύο τρόποι για να μετατρέψουμε έναν αριθμό από το δυαδικό στο δεκαεξαδικό σύστημα αρίθμησης και αντίστροφα.

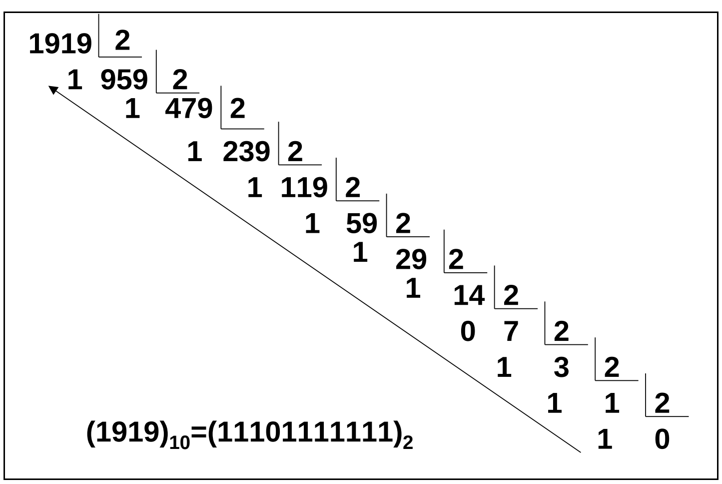
Ο πρώτος τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε ως ενδιάμεσο το δεκαδικό σύστημα. Στον τρόπο αυτό μετατρέπουμε από το ένα σύστημα στο δεκαδικό και στη συνέχεια από το δεκαδικό στο άλλο, όπως περιγράψαμε προηγουμένως. Με το δεύτερο τρόπο, μετατρέπουμε απευθείας από το ένα σύστημα στο άλλο. Οι δύο αυτοί τρόποι περιγράφονται στη συνέχεια.

Μετατροπή μέσω του δεκαδικού

Για να μετατρέψουμε το δεκαεξαδικό αριθμό $(77F)_{16}$ στο δυαδικό σύστημα μπορούμε να τον μετατρέψουμε πρώτα στο δεκαδικό αριθμό:

$$7\times16^2 + 7\times16^1 + 15\times16^0 = (1919)_{10}$$

Στη συνέχεια μετατρέπουμε το δεκαδικό αριθμό στον αντίστοιχο δυαδικό αριθμό:



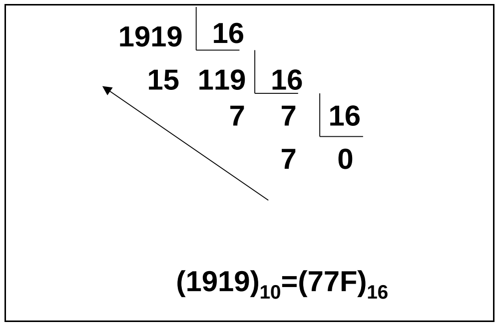
Σχήμα 2: Μετατροπή του αριθμού $(1919)_{10}$ στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης

Επομένως, η δυαδική παράσταση του αριθμού $(77F)_{16}$ είναι η $(11101111111)_2$.

Αντίστροφα, για τη δεκαεξαδική παράσταση του αριθμού $(11101111111)_2$ βρίσκουμε πρώτα τη δεκαδική αναπαράσταση που είναι:

$$2^{10}+2^9+2^8+2^6+2^5+2^4+2^3+2^2+2^1+2^0=1919$$

Στη συνέχεια η μετατροπή στο δεκαεξαδικό σύστημα θα δώσει $(77F)_{16}$.



Σχήμα 3: Μετατροπή του αριθμού $(1919)_{10}$ στο δεκαεξαδικό σύστημα αρίθμησης

Απευθείας μετατροπή

Η απευθείας μετατροπή αριθμών από το δυαδικό στο δεκαεξαδικό σύστημα και αντίστροφα στηρίζεται στο γεγονός ότι $16=2^4$, επομένως ένα ψηφίο στο δεκαεξαδικό σύστημα αντιστοιχεί σε τέσσερα ακριβώς ψηφία στο δυαδικό σύστημα. Με βάση την παρατήρηση αυτή μπορούμε να ακολουθήσουμε τη διαδικασία που περιγράφουμε στη συνέχεια.

Για την απευθείας μετατροπή ενός δεκαεξαδικού αριθμού στο δυαδικό σύστημα αντικαθιστούμε κάθε ψηφίο του αριθμού με ένα τετραψήφιο δυαδικό αριθμό σύμφωνα με τον ακόλουθο πίνακα.

δεκαεξαδικό ψηφίο	δυαδικά ψηφία
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
A	1010
B	1011
C	1100
D	1101
E	1110
F	1111

Μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι κάθε δυαδικός αριθμός στον πίνακα (π.χ. 1100) είναι η έκφραση του αντίστοιχου δεκαεξαδικού ψηφίου στο δυαδικό σύστημα (στην περίπτωση αυτή, του C). Έτσι, για παράδειγμα, ο δεκαεξαδικός αριθμός $(77F)_{16}$ αντιστοιχεί στο δυαδικό αριθμό 0111 0111 1111 όπως φαίνεται στη συνέχεια.

7	**7**	**F**
0111	**0111**	**1111**

Αντίστροφα, για να μετατρέψουμε έναν αριθμό από το δυαδικό σύστημα στο δεκαεξαδικό, χωρίζουμε σε τετράδες το ακέραιο μέρος του αριθμού από την υποδιαστολή και προς τα αριστερά προσθέτοντας μηδενικά, αν χρειαστεί, στο αριστερό μέρος του αριθμού. Ακόμη, χωρίζουμε σε τετράδες το κλασματικό μέρος του αριθμού από την υποδιαστολή και δεξιά προσθέτοντας μηδενικά, αν χρειαστεί, στο δεξιό μέρος του αριθμού. Στη συνέχεια, αντιστοιχούμε σε κάθε τετράδα το αντίστοιχο δεκαεξαδικό ψηφίο. Έτσι, ο δυαδικός αριθμός 1 1010 1101, 1010 11 αντιστοιχεί στο δεκαεξαδικό αριθμό 1AD,AC όπως φαίνεται στη συνέχεια (με πλάγια γράμματα φαίνονται τα μηδενικά που προσθέσαμε στην αρχή και στο τέλος του αριθμού προκειμένου να συμπληρωθούν τετράδες ψηφίων).

***000*1**	**1010**	**1101**	**1010**	**11*00***
1	**A**	**D**	**A**	**C**

Μπορεί κανείς να διαπιστώσει ότι η απευθείας μετατροπή είναι πολύ πιο εύκολη και γρήγορη από ότι η μετατροπή χρησιμοποιώντας ως ενδιάμεσο το δεκαδικό σύστημα.

2.2.4 Μετατροπή από οκταδικό σε δυαδικό και αντίστροφα

Η μετατροπή αυτή μπορεί να γίνει μέσω του δεκαδικού ή απευθείας. Για την απευθείας μετατροπή αριθμών από το δυαδικό στο οκταδικό και αντίστροφα στηριζόμαστε στο γεγονός ότι, παρόμοια με το δεκαεξαδικό σύστημα, ισχύει ότι $8=2^3$, επομένως ένα ψηφίο στο δεκαεξαδικό σύστημα αντιστοιχεί σε τρία ακριβώς ψηφία στο δυαδικό σύστημα. Με βάση την παρατήρηση αυτή μπορούμε να ακολουθήσουμε τη διαδικασία που περιγράφουμε στη συνέχεια.

Για την απευθείας μετατροπή ενός οκταδικού αριθμού στο δυαδικό σύστημα αντικαθιστούμε κάθε ψηφίο του αριθμού με ένα τριψήφιο δυαδικό αριθμό σύμφωνα με τον ακόλουθο πίνακα.

δεκαεξαδικό ψηφίο	δυαδικά ψηφία
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

Μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι κάθε δυαδικός αριθμός στον πίνακα (π.χ. 100) είναι η έκφραση του αντίστοιχου οκταδικού ψηφίου στο δυαδικό σύστημα (στην περίπτωση αυτή, του 4). Έτσι, για παράδειγμα, ο οκταδικός αριθμός $(773)_8$ αντιστοιχεί στο δυαδικό αριθμό 111 111 011, όπως φαίνεται στη συνέχεια.

7	**7**	**3**
111	**111**	**011**

Αντίστροφα, για να μετατρέψουμε έναν αριθμό από το δυαδικό σύστημα στο οκταδικό, χωρίζουμε τα ψηφία του σε τριάδες προσθέτοντας, αν χρειαστεί, μηδενικά στην αρχή και στο τέλος του αριθμού (μετά την υποδιαστολή) και αντιστοιχούμε σε κάθε τριάδα το αντίστοιχο οκταδικό ψηφίο. Έτσι, ο δυαδικός αριθμός 1 101 101 αντιστοιχεί στον οκταδικό αριθμό 155, όπως φαίνεται στη συνέχεια (με πλάγια γράμματα φαίνονται τα μηδενικά που προσθέσαμε στην αρχή του αριθμού προκειμένου να συμπληρωθούν τριάδες ψηφίων).

***00*1**	**101**	**101**
1	**5**	**5**

2.2.5 Μετατροπή από το δεκαεξαδικό στο οκταδικό σύστημα μέσω του δυαδικού

Για να μετατρέψουμε ένα αριθμό από το δεκαεξαδικό σύστημα στο οκταδικό μετατρέπουμε τον αριθμό στον αντίστοιχο δυαδικό και στη συνέχεια το δυαδικό αριθμό στο οκταδικό σύμφωνα με τα παραπάνω. Για παράδειγμα, η διαδικασία μετατροπής του δεκαεξαδικού αριθμού $(3FA)_{16}$ στο οκταδικό σύστημα, φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα.

3	**F**	**A**
0011	**1111**	**1010**

001	**111**	**111**	**010**
1	**7**	**7**	**2**

Επομένως, η οκταδική αναπαράσταση του δεκαεξαδικού αριθμού $(3FA)_{16}$ είναι ο οκταδικός αριθμός $(1772)_8$.