<u>Σύστημα M/M/1 (είσοδος Poisson, εκθετικός χρόνος εξυπηρέτησης, ένα σημείο εξυπηρέτησης δηλαδή s = 1 και απεριόριστη χωρητικότητα ουράς)</u>

Έστω λ ο μέσος ρυθμός αφίξεων και μ ο μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης. Τότε

- ο βαθμός απασχόλησης του συστήματος: $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$,
- το μέσο πλήθος πελατών στην ουρά αναμονής: $L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$,
- το μέσο πλήθος πελατών στο σύστημα : $L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$, $L = L_q + L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$,
- ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά : $W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$, $W_q = \frac{L_q}{\lambda}$,
- ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα: $W = \frac{1}{\mu - \lambda}$, $W = \frac{L}{\lambda}$, $W = W_q + \frac{1}{\mu}$,
- η πιθανότητα ο χρόνος παραμονής στο σύστημα ($\boldsymbol{\mathcal{W}}$) να ξεπεράσει κάποιο χρόνο, έστω t, είναι:

$$P(\mathcal{W} > t) = e^{-\mu(1-\rho)t} \quad \text{για } t \geq 0$$

- η πιθανότητα ο χρόνος αναμονής στο σύστημα ($\boldsymbol{\mathcal{W}_q}$) να ξεπεράσει κάποιο χρόνο, έστω t, είναι:

$$P\left(\mathcal{W}_q > t\right) = \rho \cdot e^{-\mu(1-\rho)t} \quad \text{για } t \geq 0$$

- η πιθανότητα ο χρόνος αναμονής στο σύστημα ($\mathcal{W}_q$) να ξεπεράσει κάποιο χρόνο, έστω t, με δεδομένο ότι δεν είναι μηδέν, είναι:

$$P\left(\mathcal{W}_q > t / \mathcal{W}_q > 0\right) = \frac{P(\mathcal{W}_q > t)}{P(\mathcal{W}_q > 0)} = e^{-\mu(1-\rho)t} \quad \text{για } t \geq 0$$

- η πιθανότητα να μην υπάρχει κανένα πελάτης στο σύστημα : $P_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$,
- η πιθανότητα να βρίσκονται n πελάτες στο σύστημα: $P_n = \rho^n \cdot P_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0$,

<u>Σύστημα M/M/1/k (είσοδος Poisson, εκθετικός χρόνος εξυπηρέτησης, ένα σημείο εξυπηρέτησης δηλαδή s=1 και πεπερασμένη χωρητικότητα συστήματος, k)</u>

Έστω λ ο μέσος ρυθμός αφίξεων και μ ο μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης. Τότε:

- ο βαθμός απασχόλησης του συστήματος: $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$,
- η πιθανότητα να μην υπάρχει κανένα πελάτης στο σύστημα: $P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}}$,
- η πιθανότητα να βρίσκονται n πελάτες στο σύστημα: $P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0$, $\quad n \le k$
- η πιθανότητα ένας πελάτης να χρειαστεί να περιμένει: $P_w = 1 - P_0$,
- το μέσο πλήθος πελατών στην ουρά αναμονής: $L_q = L - (1 - P_0)$,
- το μέσο πλήθος πελατών στο σύστημα: $L = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(k+1)\rho^{k+1}}{1-\rho^{k+1}}$,
- ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά: $W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}}$, όπου $\bar{\lambda} = \lambda(1 - P_k)$

ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα: $W = \frac{L}{\bar{\lambda}}$, $W = W_q + \frac{1}{\mu}$

<u>Σύστημα M/M/s (είσοδος Poisson, εκθετικός χρόνος εξυπηρέτησης, περισσότερα από ένα σημεία εξυπηρέτησης δηλαδή s>1 και απεριόριστη χωρητικότητα ουράς)</u>

Έστω λ ο μέσος ρυθμός αφίξεων και μ ο μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης κάθε ομοιόμορφης θέσης εξυπηρέτησης. Τότε:

- ο βαθμός απασχόλησης του συστήματος: $\rho = \dfrac{\lambda}{s \cdot \mu}$,
- η πιθανότητα να μην υπάρχει κανένα πελάτης στο σύστημα: $P_0 = \dfrac{1}{\sum_{n=0}^{s-1}\left[\dfrac{(\lambda/\mu)^n}{n!}\right] + \dfrac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \left(\dfrac{s\mu}{s\mu - \lambda}\right)}$,
- η πιθανότητα να βρίσκονται n πελάτες στο σύστημα: $P_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0, & n \le s \\ \dfrac{1}{s!\, s^{n-s}}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0, & n > s \end{cases}$
- η πιθανότητα ένας πελάτης να χρειαστεί να περιμένει: $P_w = 1 - \sum_{n=0}^{s-1} P_n$, $P_w = \dfrac{1}{s!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^s \left(\dfrac{s\mu}{s\mu - \lambda}\right) P_0$,
- το μέσο πλήθος πελατών στην ουρά αναμονής: $L_q = \dfrac{(\lambda/\mu)^s \lambda\mu}{(s-1)!\,(s\mu - \lambda)^2} \cdot P_0$,
- το μέσο πλήθος πελατών στο σύστημα: $L = L_q + \dfrac{\lambda}{\mu}$,
- ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά: $W_q = \dfrac{L_q}{\lambda}$,
- ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα: $W = \dfrac{L}{\lambda}$, $W = W_q + \dfrac{1}{\mu}$

Γενικά, σε οποιοδήποτε σύστημα (είτε με απεριόριστη είτε με περιορισμένη χωρητικότητα ουράς), ισχύει η σχέση:

$$P_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} \cdot P_{n-1}$$