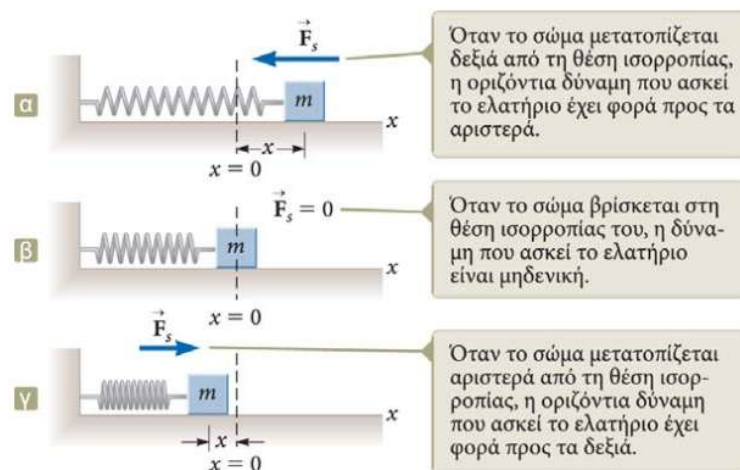


Περιοδική κίνηση

- ▶ Η **περιοδική κίνηση** είναι η κίνηση που εκτελεί ένα σώμα όταν επιστρέφει ανά τακτά χρονικά διαστήματα σε μια συγκεκριμένη θέση.
- ▶ Στα μηχανικά συστήματα, όταν η δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα είναι ανάλογη της θέσης του σώματος ως προς τη θέση ισορροπίας του, παρατηρείται μια ειδική μορφή περιοδικής κίνησης.
- ▶ Αν η δύναμη αυτή έχει κατεύθυνση πάντα προς τη θέση ισορροπίας, τότε η κίνηση ονομάζεται **απλή αρμονική κίνηση**.

- Ένας κύβος μάζας m είναι συνδεδεμένος στο άκρο ενός ελατηρίου και μπορεί και κινείται ελεύθερα επάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές.
- Όταν το ελατήριο δεν είναι ούτε εκτεταμένο ούτε συμπιεσμένο, ο κύβος βρίσκεται στη **θέση ισορροπίας** ($x = 0$).
- Αν ένα τέτοιο σύστημα απομακρυνθεί από τη θέση ισορροπίας του, θα αρχίσει να ταλαντώνεται.
- Ο νόμος του Hooke ορίζει ότι $F_s = -kx$
 - F_s είναι η δύναμη επαναφοράς, κατεύθυνση πάντα προς τη θέση ισορροπίας, αντίθετη με τη μετατόπιση του σώματος από τη θέση ισορροπίας.
 - k η σταθερά ελατηρίου.
 - x η μετατόπιση.



Κίνηση συστήματος σώματος-ελατηρίου

► (α): $x > 0$, δύναμη επαναφοράς με κατεύθυνση προς τα αριστερά.

► (β): $x = 0$, το ελατήριο δεν είναι ούτε εκτεταμένο ούτε συμπιεσμένο, δύναμη είναι ίση με 0.

► (γ): $x < 0$, δύναμη επαναφοράς με κατεύθυνση προς τα δεξιά.

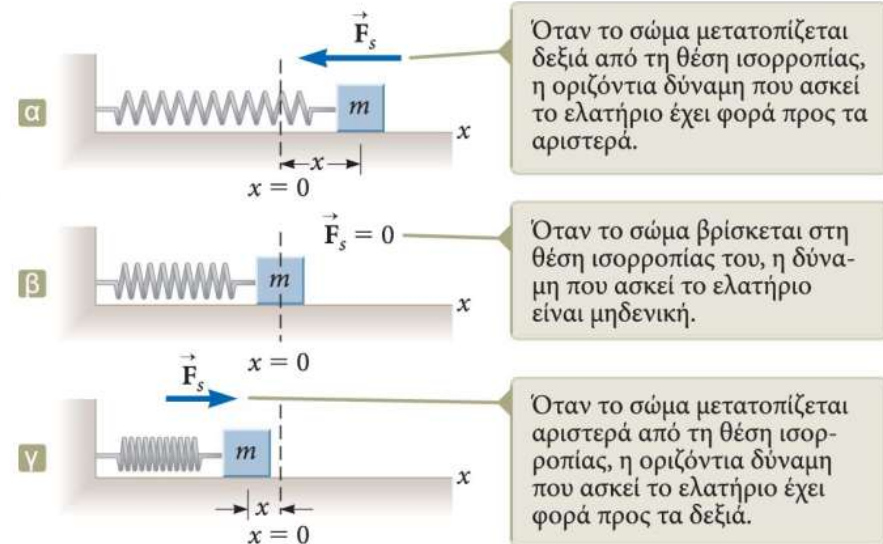
► Η δύναμη που περιγράφει ο νόμος του Hooke είναι η συνισταμένη δύναμη.

$$-kx = ma_x \rightarrow a_x = -\frac{k}{m}x$$

► Η επιτάχυνση του κύβου είναι ανάλογη της μετατόπισής του.

► Η κατεύθυνση της επιτάχυνσης είναι αντίθετη από την κατεύθυνση της μετατόπισης του κύβου από τη θέση ισορροπίας του.

► Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική κίνηση όταν η επιτάχυνσή του είναι ανάλογη της θέσης του και έχει κατεύθυνση αντίθετη από αυτή της μετατόπισης από τη θέση ισορροπίας.



Η επιτάχυνση δεν είναι σταθερή.

Στη θέση $x = A$, επιτάχυνσή $-kA/m$.

Στη θέση ισορροπίας, $a = 0$.

Στη θέση $x = -A$, επιτάχυνσή $+kA/m$.

Σωματίδιο που εκτελεί απλή αρμονική κίνηση

► Μοντέλο του σωματιδίου που εκτελεί απλή αρμονική κίνηση

► Θεωρούμε ότι η ταλάντωση γίνεται στον άξονα x .

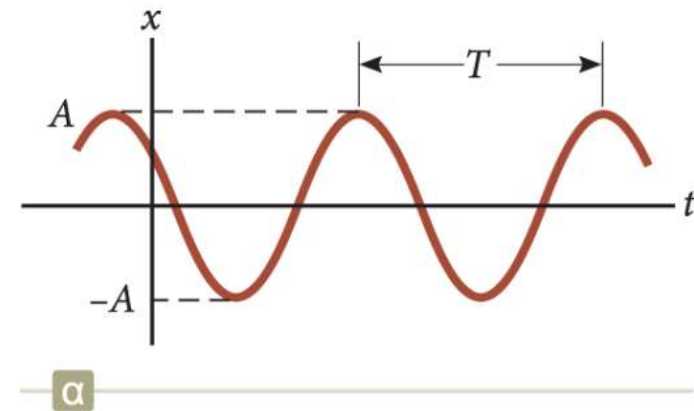
► Επιτάχυνση

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \quad \boxed{-\omega^2 x}$$

► Θέτουμε

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

► οπότε $a = -\omega^2 x$



Μία λύση είναι η $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$.
Τα A , ω , ϕ είναι σταθερές.

Πρέπει να βρούμε μια συνάρτηση που να ικανοποιεί την εξίσωση.

Δηλαδή μια συνάρτηση $x(t)$ η οποία θα έχει δεύτερη παράγωγο ίδια με την αρχική συνάρτηση, αλλά με αρνητικό πρόσημο και πολλαπλασιασμένη με ω^2 .

Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις του ημιτόνου (sine) και του συνημιτόνου (cosine) πληρούν αυτές τις προϋποθέσεις.

$$\text{Μια λύση } x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

Απλή αρμονική κίνηση

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi)$$

$$v_{\max} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}} A$$

$$a_{\max} = \omega^2 A = \frac{k}{m} A$$

Τα A , ω , ϕ είναι σταθερές

A : πλάτος, η μέγιστη τιμή της θέσης του σωματιδίου είτε προς τη θετική είτε προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα x .

ω : κυκλική συχνότητα ή γωνιακή συχνότητα.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ϕ : σταθερά φάσης ή αρχική γωνία φάσης.

$(\omega t + \phi)$: φάση της κίνησης

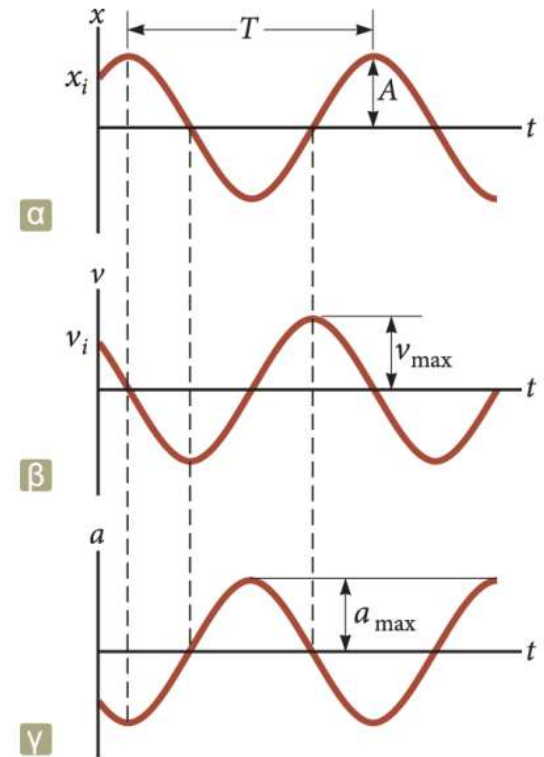
T : περίοδος της κίνησης

f : συχνότητα

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Η συχνότητα και η περίοδος εξαρτώνται μόνο από τη μάζα του σωματιδίου και τη σταθερά του ελατηρίου.

Η συχνότητα είναι μεγάλη όταν το ελατήριο είναι σκληρό (έχει μεγάλη σταθερά k) και μειώνεται όσο αυξάνεται η μάζα του σωματιδίου.



Η ταχύτητα και η επιτάχυνση είναι εκτός φάσης από τη θέση κατά 90° και 180° , αντίστοιχα.

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi)$$

► Αρχικές συνθήκες τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι

► $x(0) = A$

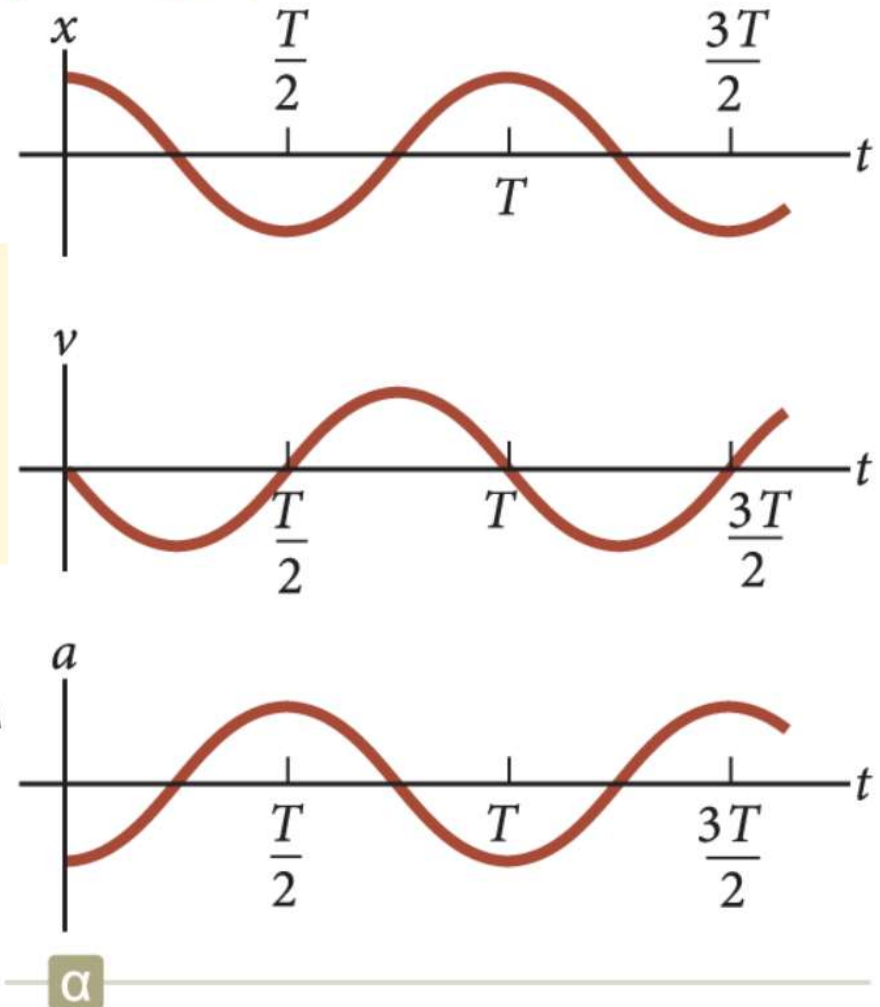
► $v(0) = 0$

► Αυτό σημαίνει ότι $\phi = 0$.

► Οι ακραίες τιμές της επιτάχυνσης είναι $\pm \omega^2 A$ και προκύπτουν στις θέσεις $\pm A$.

► Οι ακραίες τιμές της ταχύτητας είναι $\pm \omega A$ και προκύπτουν στη θέση $x = 0$.

Απλή αρμονική κίνηση



Απλή αρμονική κίνηση

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi)$$

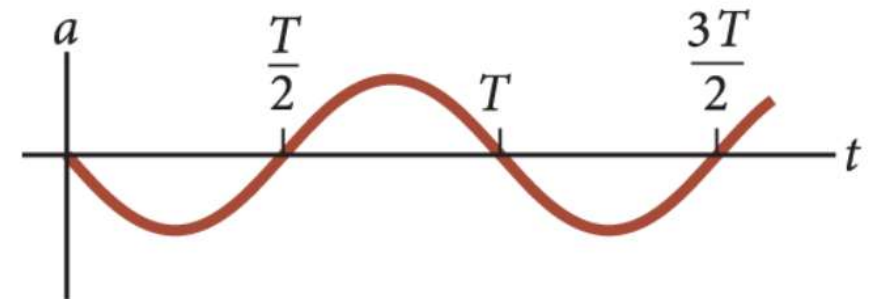
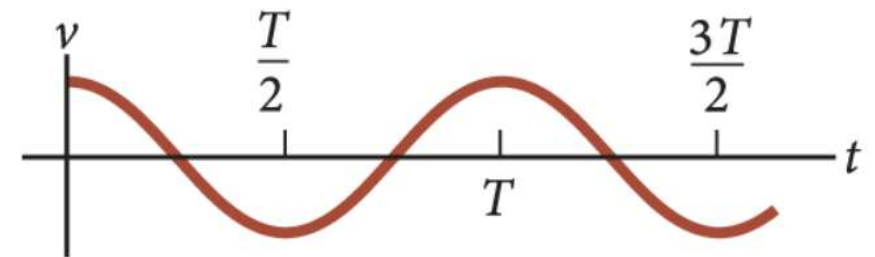
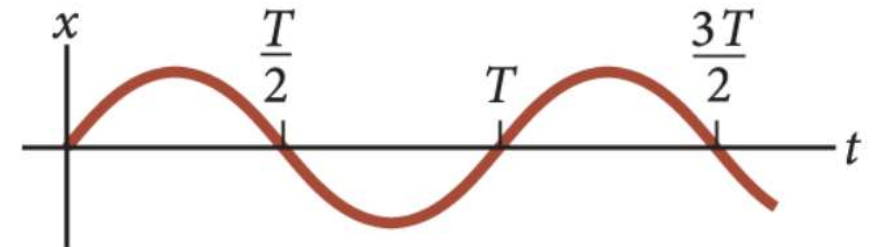
► Οι αρχικές συνθήκες τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι

► $x(0) = 0$

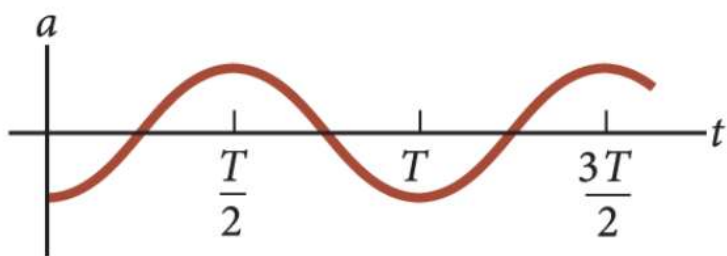
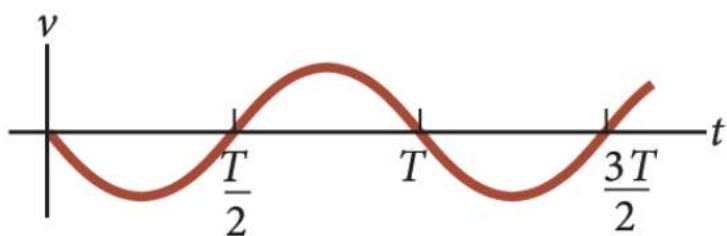
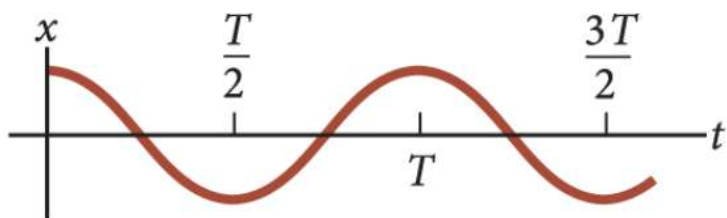
► $v(0) = v_i$

► Αυτό σημαίνει ότι $\phi = -\pi/2$.

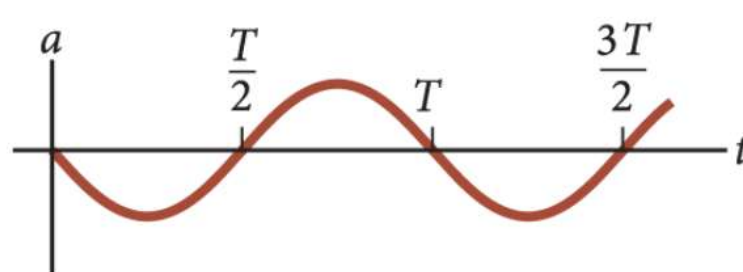
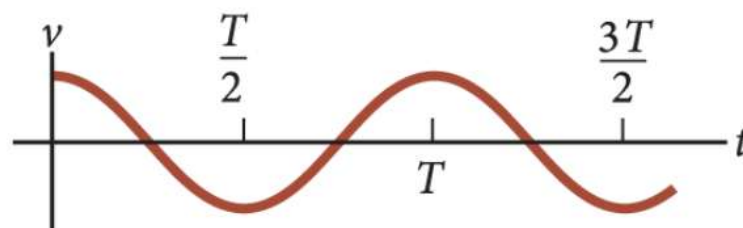
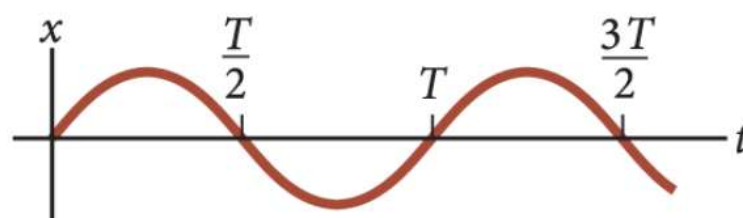
► Το γράφημα έχει μετατεθεί προς τα δεξιά κατά ένα τέταρτο του κύκλου ταλάντωσης ως προς το γράφημα $x(0) = A$.



Το γράφημα έχει μετατεθεί προς τα δεξιά κατά ένα τέταρτο του κύκλου ταλάντωσης ως προς το γράφημα $x(0) = A$.



α

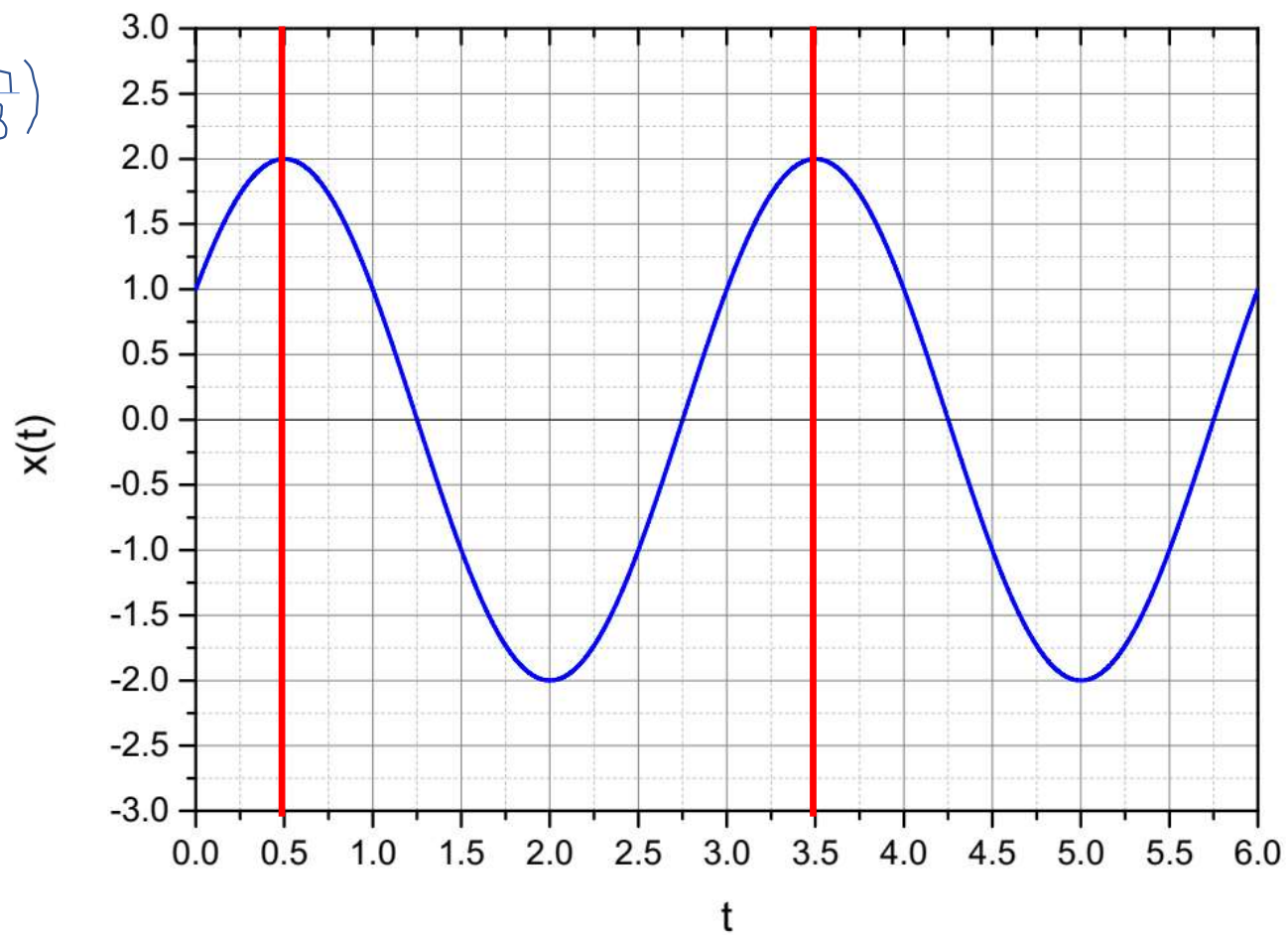


β

Απλή αρμονική κίνηση

$$2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right)$$

A ω φ



Ενέργεια του απλού αρμονικού ταλαντωτή

Κινητική ενέργεια: $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$

Υποθέτουμε ότι το ελατήριο δεν έχει μάζα, οπότε η μάζα του συστήματος είναι η μάζα του σώματος.

Ελαστική δυναμική ενέργεια: $U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi)$

Συνολική ενέργεια: $E = K + U = \frac{1}{2}kA^2$

Εφόσον η επιφάνεια δεν έχει τριβές, το σύστημα είναι απομονωμένο η συνολική ενέργειά του είναι σταθερή

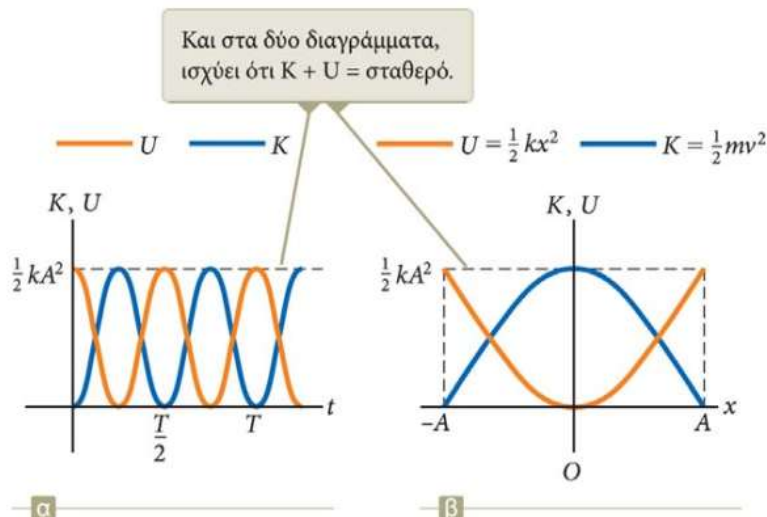
► Η συνολική μηχανική ενέργεια είναι σταθερή.

► Σε κάθε χρονική στιγμή, η συνολική ενέργεια είναι $\frac{1}{2}kA^2$

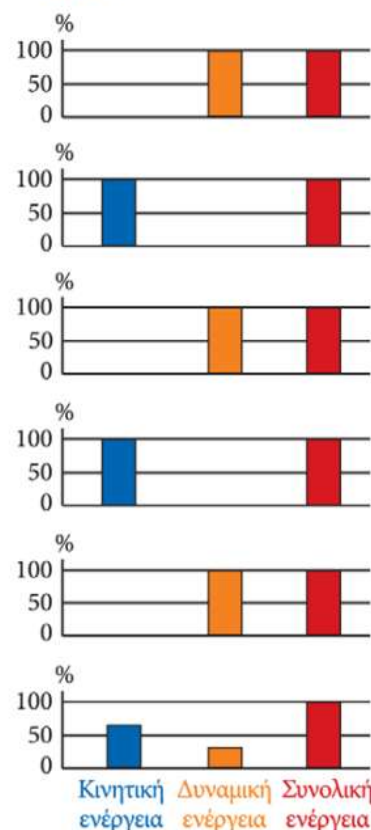
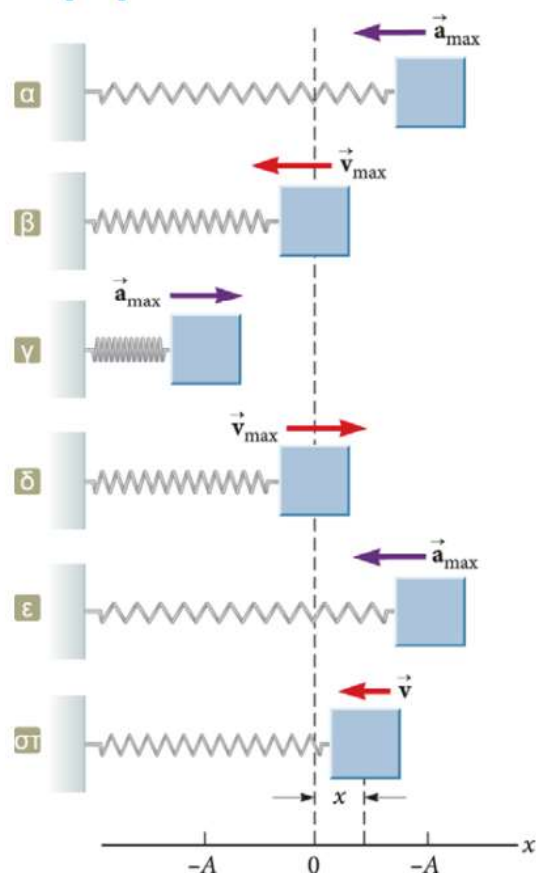
► Η συνολική μηχανική ενέργεια είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους.

► Η αποθηκευμένη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου μετατρέπεται συνεχώς σε κινητική ενέργεια του σώματος και αντιστρόφως.

► Στο διάγραμμα, $\phi = 0$.



Ενέργεια του απλού αρμονικού ταλαντωτή - Σύνοψη



t	x	v	a	K	U
0	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$\frac{T}{4}$	0	$-\omega A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
$\frac{T}{2}$	$-A$	0	$\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$\frac{3T}{4}$	0	ωA	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
T	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
t	x	v	$-\omega^2 x$	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}kx^2$

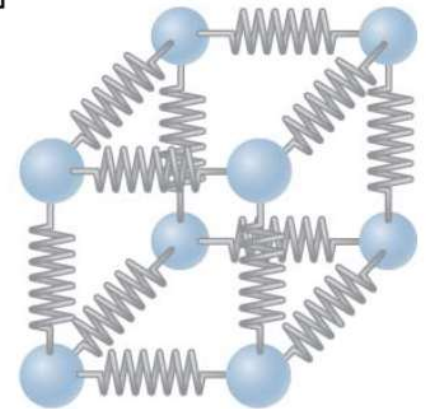
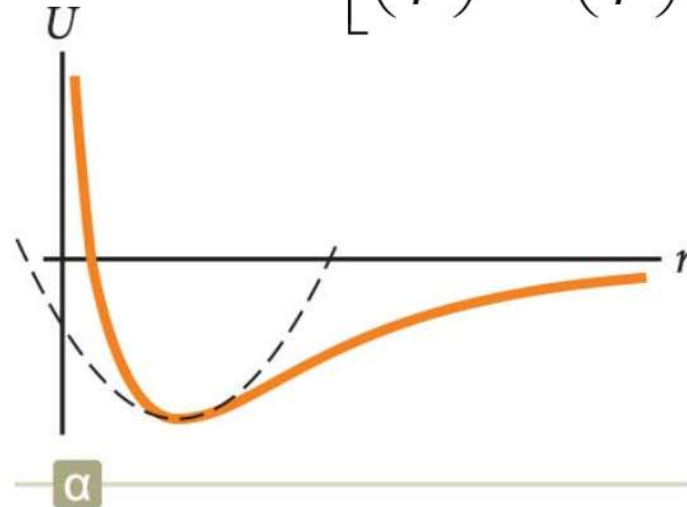
Ταχύτητα σε μια συγκεκριμένη θέση: $E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \rightarrow v = \pm \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}$

Απλός αρμονικός ταλαντωτής και δια-ατομικό δυναμικό

Δυναμικό αλληλεπίδρασης μεταξύ δύο ατόμων στο μόριο (Lennard-Jones)

- ▶ Αν τα άτομα μέσα στα μόρια δεν απομακρύνονται πολύ μεταξύ τους, μπορούμε να μοντελοποιήσουμε τις δυνάμεις συνοχής τους ως δυνάμεις που προκαλούνται από μικροσκοπικά ελατήρια.
- ▶ Η δυναμική ενέργεια συμπεριφέρεται όπως στην περίπτωση του απλού αρμονικού ταλαντωτή.

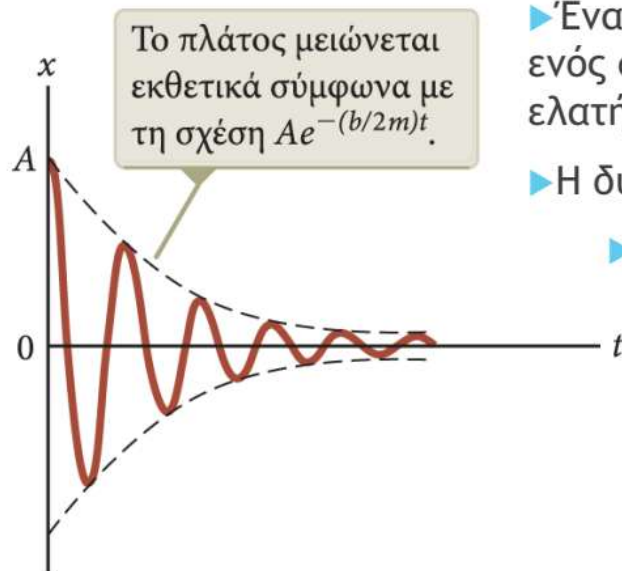
$$U(r) = 4 \epsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^6 \right]$$



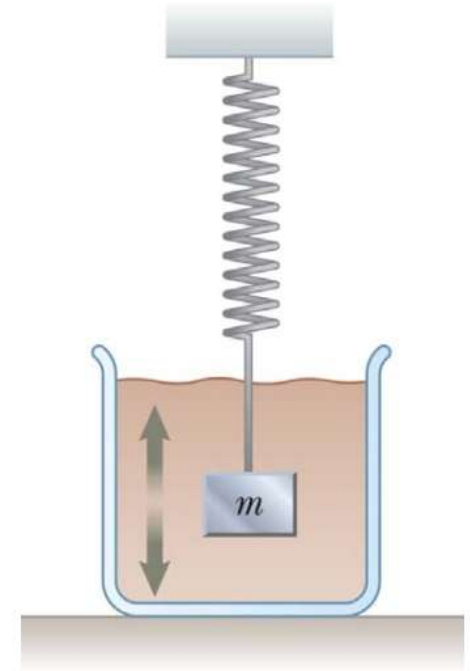
$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Φθίνουσες ταλαντώσεις

- ▶ Σε πολλά πραγματικά συστήματα, δρουν μη συντηρητικές δυνάμεις.
 - ▶ Αυτά τα συστήματα δεν είναι ιδανικά (όπως τα συστήματα που μελετήσαμε μέχρι τώρα).
 - ▶ Η τριβή και η αντίσταση του αέρα είναι μη συντηρητικές δυνάμεις.
- ▶ Σε αυτή την περίπτωση, η μηχανική ενέργεια του συστήματος μειώνεται συναρτήσει του χρόνου και η κίνηση είναι **φθίνουσα ή υφίσταται απόσβεση**.



- ▶ Ένα παράδειγμα φθίνουσας κίνησης είναι η κίνηση ενός σώματος το οποίο είναι προσαρτημένο σε ένα ελατήριο και βυθισμένο σε ένα παχύρρευστο υγρό.
- ▶ Η δύναμη επιβράδυνσης εκφράζεται ως $\vec{R} = -b\vec{v}$
 - ▶ Η σταθερά b ονομάζεται **συντελεστής απόσβεσης**.
 - ▶ Το πλάτος μειώνεται ως προς τον χρόνο.
 - ▶ Οι διακεκομμένες γραμμές ορίζουν την **περιβάλλουσα** της καμπύλης της κίνησης.
 - ▶ Η δύναμη επαναφοράς ισούται με $-kx$.



Φθίνουσες ταλαντώσεις

- ▶ Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε

$$\Sigma F_x = -kx - b v_x = m a_x \rightarrow -kx - b(dx/dt) = m(d^2x/dt^2)$$

- ▶ Όταν η δύναμη τριβής είναι μικρή συγκριτικά με τη μέγιστη δύναμη επαναφοράς, μπορούμε να βρούμε τη συνάρτηση που δίνει το x .

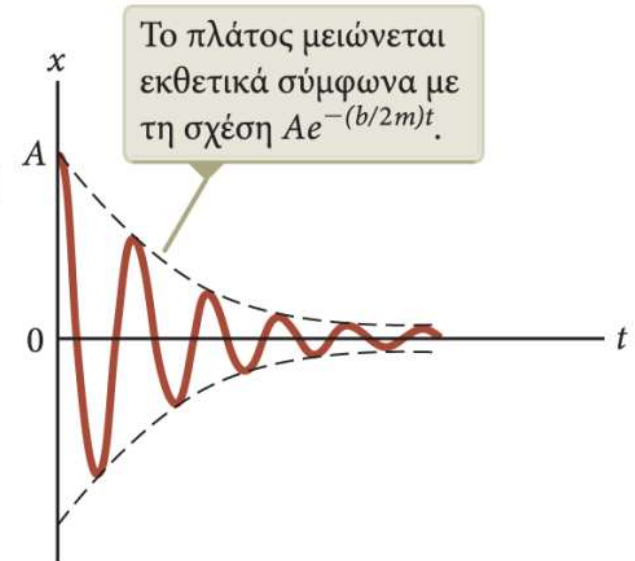
- ▶ Αυτό συμβαίνει όταν ο συντελεστής b είναι μικρός.

- ▶ Η θέση περιγράφεται από τη σχέση

$$x = A e^{-(b/2m)t} \cos(\omega t + \phi)$$

- ▶ Η κυκλική συχνότητα είναι

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$



- ▶ Όταν η δύναμη τριβής είναι μικρή, η κίνηση εξακολουθεί να είναι ταλάντωση, αλλά το πλάτος μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο.

- ▶ Τελικά η κίνηση σταματά.

- ▶ Η κυκλική συχνότητα μπορεί να εκφραστεί και στη μορφή: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$, όπου $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ ιδιοσυχνότητα (ή φυσική συχνότητα) του συστήματος.

Για σταθερά k , m η ταλάντωση φθίνει πιο γρήγορα όσο αυξάνεται η δύναμη επιβράδυνσης.

Είδη απόσβεσης

► Όταν η δύναμη επαναφοράς είναι τέτοια ώστε $b/2m < \omega_0$, τότε λέμε ότι το σύστημα παρουσιάζει **υποαπόσβεση**.

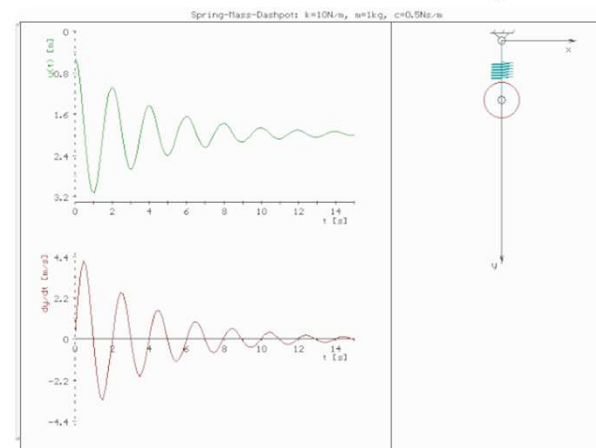
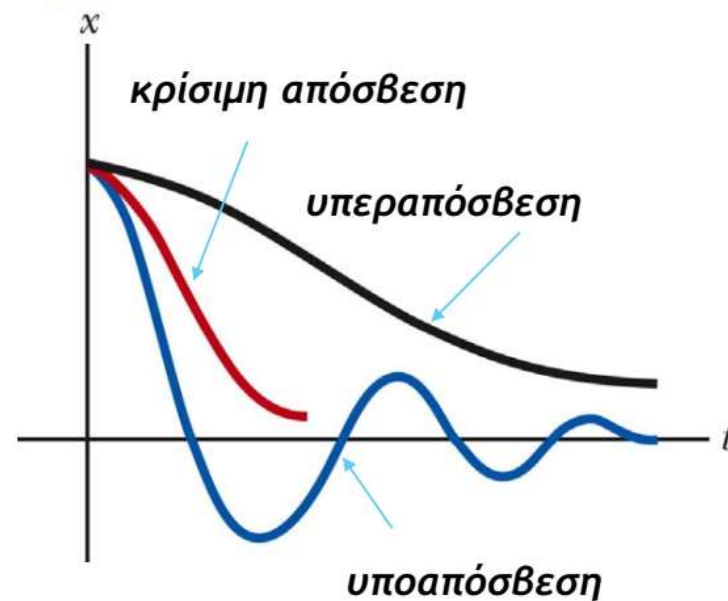
► Όταν ο συντελεστής b πάρει μια οριακή τιμή b_c τέτοια ώστε $b_c/2m = \omega_0$, το σύστημα δεν ταλαντώνεται.

► Τότε λέμε ότι έχουμε **κρίσιμη απόσβεση** (το σύστημα δεν ταλαντώνεται)- Το σύστημα αφήνεται ελεύθερο και πλησιάζει προς τη θέση ισορροπίας, αλλά δεν περνά από αυτή.

► Αν η δύναμη επαναφοράς είναι τέτοια ώστε $b/2m > \omega_0$, τότε λέμε ότι το σύστημα παρουσιάζει **υπεραπόσβεση** (το σύστημα δεν ταλαντώνεται)- Το σύστημα αφήνεται ελεύθερο και επιστρέφει προς τη θέση ισορροπίας, αλλά δεν περνά από αυτή.

► Όσο αυξάνεται το b τόσο αυξάνεται ο χρόνος που χρειάζεται το σύστημα για να φτάσει στη θέση ισορροπίας.

► Τα συστήματα στα οποία έχουμε κρίσιμη απόσβεση και υπεραπόσβεση, δεν έχουν κυκλική συχνότητα (δεν ορίζεται) και η $x=Ae^{-(b/2m)t} \cos(\omega t + \phi)$ δεν ισχύει.

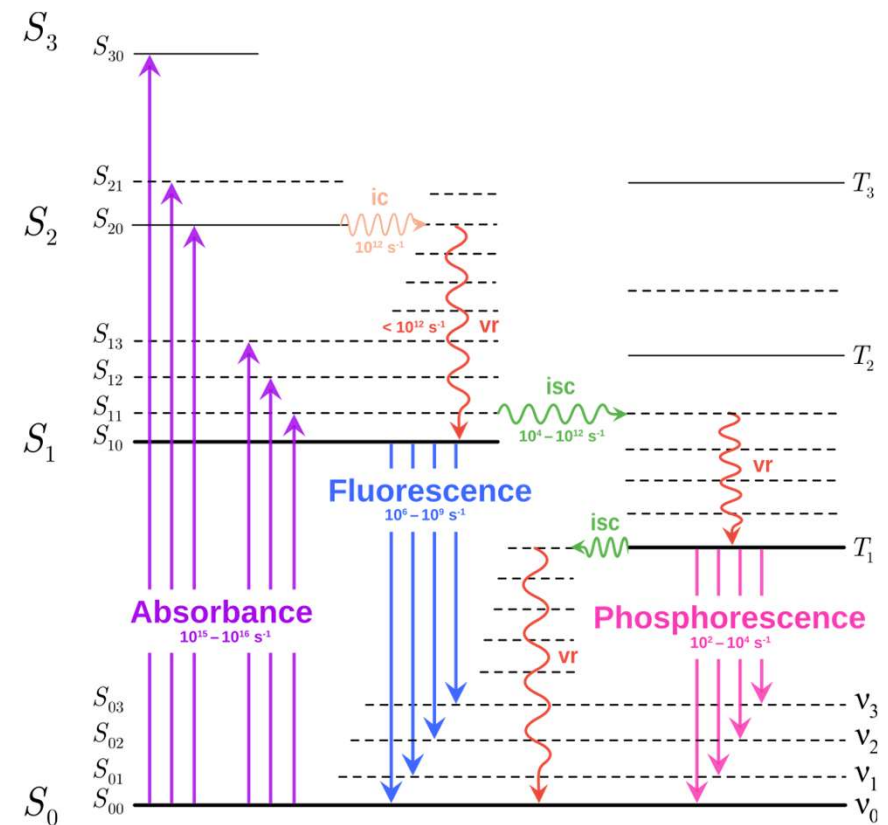


MOLECULAR Vibrational Relaxations

Vibrational couplings and relaxation at
Timescales ns-fs $\rightarrow$ dynamics of the system and coupling strengths

vr : vibrational relaxation (dissipation of energy from the molecule to its surroundings, and thus it cannot occur for isolated molecules).

This energy dissipation occurs via collisions or interactions, creating thermal equilibrium and often acting as a precursor to chemical reactions or influencing photochemistry.



Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις

- ▶ Μπορούμε να αντισταθμίσουμε την απώλεια ενέργειας σε μια φθίνουσα ταλάντωση ασκώντας μια περιοδική εξωτερική δύναμη.
- ▶ Στο σύστημα μεταφέρεται ενέργεια μέσω μιας δύναμης που έχει την κατεύθυνση της κίνησης.
- ▶ Το πλάτος της κίνησης διατηρείται σταθερό αν η ενέργεια που παρέχεται σε κάθε κύκλο ταλάντωσης ισούται με τη μείωση της μηχανικής ενέργειας που προκαλούν οι δυνάμεις αντίστασης σε κάθε κύκλο.
- ▶ Έστω το προηγούμενο σύστημα στο οποίο ασκείται περιοδική δύναμη διέγερσης $F=F_0 \sin \omega t$
- ▶ Προσοχή: Η συχνότητα ω της διεγείρουσας μπορεί να μεταβάλλεται, ενώ η ω_0 του συστήματος εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του (k, m).
- ▶ Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε

$$\Sigma F_x = F_0 \sin \omega t - kx - b v_x = m a_x \rightarrow F_0 \sin \omega t - kx - b(dx/dt) = m(d^2x/dt^2)$$

- ▶ Όταν σε ένα αρχικά ακίνητο σώμα αρχίσει να ασκείται μια δύναμη διέγερσης, το σώμα θα αρχίσει να ταλαντώνεται με ολοένα μεγαλύτερο πλάτος ταλάντωσης.
- ▶ Μετά από κάποιο χρονικό διάστημα όταν η ενέργεια που παρέχεται στο σύστημα από την εξωτερική δύναμη εξισωθεί με την ενέργεια που χάνεται ανα κύκλο, το σύστημα θα φτάσει σε σταθερή κατάσταση και θα ταλαντώνεται με σταθερό πλάτος.

Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις

▶ Όταν σε ένα αρχικά ακίνητο σώμα αρχίσει να ασκείται μια δύναμη διέγερσης, το σώμα θα αρχίσει να ταλαντώνεται με ολοένα μεγαλύτερο πλάτος ταλάντωσης.

▶ Έπειτα από αρκετό χρονικό διάστημα,

Ενέργεια δύναμης διέγερσης = Ενέργεια που μετατρέπεται σε εσωτερική

- ▶ Το σύστημα φτάνει σε μια σταθερή κατάσταση.
- ▶ Οι ταλαντώσεις συνεχίζονται με σταθερό πλάτος.
- ▶ Η λύση της εξίσωσης γίνεται $x=A \cos (\omega t+\varphi)$

▶ όπου το πλάτος μιας εξαναγκασμένης ταλάντωσης είναι

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}}$$

▶ Το ω_0 είναι η ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή χωρίς απόσβεση.

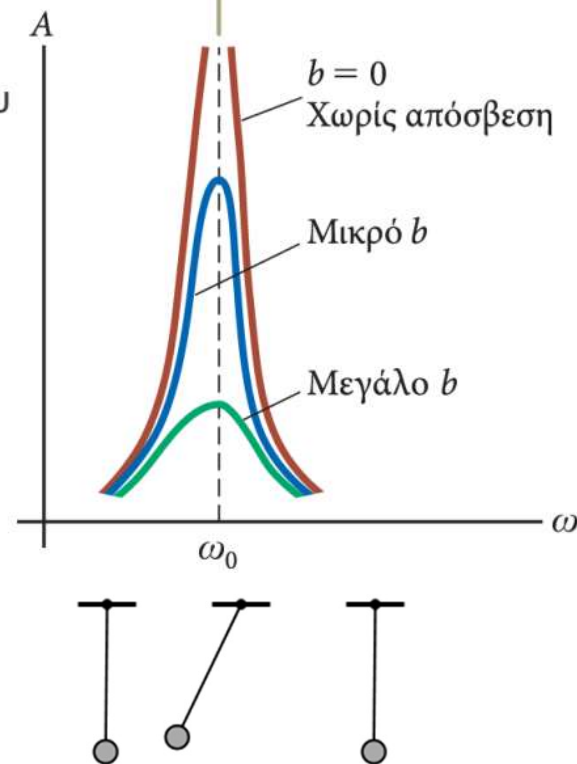
Ο εξαναγκασμένος ταλαντωτής ταλαντώνεται με τη συχνότητα της εξωτερικής δύναμης αφού οδηγείται σε σταθερή κατάσταση

Συντονισμός

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}} \quad \text{πλάτος εξαναγκασμένης ταλάντωσης}$$

- ▶ Όταν η συχνότητα της δύναμης διέγερσης πλησιάζει την ιδιοσυχνότητα της ταλάντωσης ($\omega \approx \omega_0$), παρατηρείται αύξηση του πλάτους (για μικρές τιμές του b).
- ▶ Αυτή η θεαματική αύξηση του πλάτους ονομάζεται **συντονισμός**.
- ▶ Η ιδιοσυχνότητα ω_0 είναι γνωστή και ως συχνότητα συντονισμού του συστήματος.
- ▶ Κατά τον συντονισμό, η δύναμη διέγερσης βρίσκεται σε φάση με την ταχύτητα και η ισχύς που μεταφέρεται στον ταλαντωτή παίρνει τη μέγιστη τιμή της ($v=dx/dt$, συνάρτηση ημιτόνου όπως η δύναμη).
- ▶ Συντονισμός παρατηρείται (κορυφή του γραφήματος $A-\omega$) όταν η συχνότητα της δύναμης διέγερσης είναι ίδια με την ιδιοσυχνότητα.
- ▶ Όταν η απόσβεση μειώνεται, το πλάτος A της ταλάντωσης αυξάνεται.
- ▶ Όταν η απόσβεση αυξάνεται, το πλάτος της καμπύλης αυξάνεται.
- ▶ Το σχήμα της καμπύλης συντονισμού εξαρτάται από τον συντελεστή b .

Όταν η συχνότητα ω της δύναμης διέγερσης είναι ίση με την ιδιοσυχνότητα ω_0 του ταλαντωτή, παρατηρείται συντονισμός.

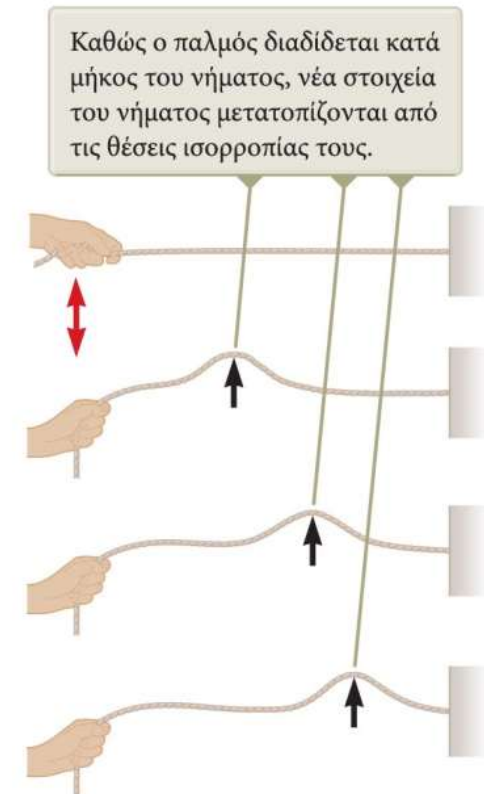


Κύματα

- ▶ Κατά τη διάδοση ενός κύματος, μεταφέρεται ενέργεια σε κάποια απόσταση, ενώ δε μεταφέρεται ύλη.
- ▶ *Υπάρχουν δύο βασικά είδη κυμάτων.*
 - ▶ *Μηχανικά κύματα*
 - ▶ Σε κάποιο φυσικό μέσο προκαλείται μια διαταραχή.
 - ▶ Το κύμα είναι η διάδοση της διαταραχής μέσα στο μέσο.
 - ▶ *Ηλεκτρομαγνητικά κύματα*
 - ▶ Δεν απαιτείται κάποιο μέσο για τη διάδοσή τους.
 - ▶ Παραδείγματα τέτοιων κυμάτων είναι το φως, τα ραδιοκύματα, και οι ακτίνες Χ.
- ▶ *Προϋποθέσεις για τη δημιουργία μηχανικών κυμάτων*
 - ▶ Μια πηγή διαταραχής.
 - ▶ Ένα μέσο το οποίο περιέχει στοιχεία που μπορούν να διαταραχθούν.
 - ▶ Ένας φυσικός μηχανισμός που επιτρέπει στα στοιχεία του μέσου να αλληλεπιδρούν μεταξύ τους.

Διάδοση παλμού σε νήμα

- ▶ Δημιουργούμε ένα κύμα, τινάζοντας ελαφρά το ένα άκρο του νήματος.
- ▶ Στο νήμα ασκείται τάση.
- ▶ Σχηματίζεται μια διαταραχή η οποία διαδίδεται κατά μήκος του νήματος.
 - ▶ Η διαταραχή ονομάζεται **παλμός**.
- ▶ Στην εικόνα φαίνονται 4 «στιγμιότυπα» από τη δημιουργία και τη διάδοση του κινούμενου παλμού.
- ▶ Το χέρι είναι η πηγή της διαταραχής.
- ▶ Το νήμα είναι το μέσο διάδοσης του παλμού.
 - ▶ Τα στοιχεία του νήματος διαταράσσονται από τη θέση ισορροπίας τους.
 - ▶ Τα στοιχεία συνδέονται μεταξύ τους, οπότε επηρεάζουν το ένα το άλλο.
- ▶ Ο παλμός έχει συγκεκριμένο ύψος.
- ▶ Ο παλμός έχει συγκεκριμένη ταχύτητα διάδοσης στο μέσο.

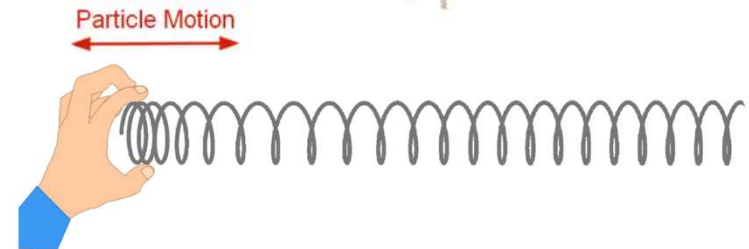


Εγκάρσια και διαμήκη κύματα

- ▶ Το κύμα είναι μια περιοδική διαταραχή, η οποία διαδίδεται σε ένα μέσο.
- ▶ Το οδεύον κύμα, ή ο παλμός, που αναγκάζει τα στοιχεία του διαταρασσόμενου μέσου να κινούνται κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης της διαταραχής ονομάζεται **εγκάρσιο κύμα**.
 - ▶ Για να δημιουργήσουμε το κύμα, πρέπει να κουνήσουμε επανειλημμένα το άκρο του νήματος πάνω-κάτω.
- ▶ Η κίνηση του σωματιδίου υποδεικνύεται με το μαύρο βέλος.
- ▶ Η διεύθυνση διάδοσης του κύματος υποδεικνύεται με το κόκκινο βέλος.

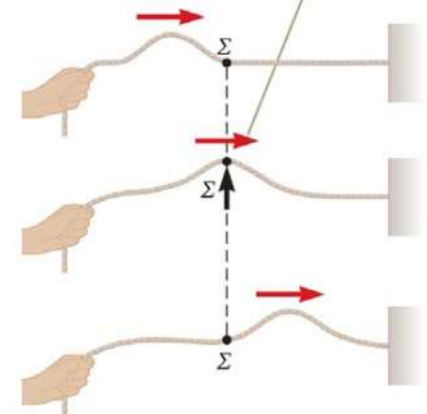
Το χέρι κινείται μπρος-πίσω μία φορά και δημιουργεί έναν διαμήκη παλμό.

Κατά τη διάδοση του παλμού, οι σπείρες μετατοπίζονται παράλληλα προς τη διεύθυνση διάδοσης.



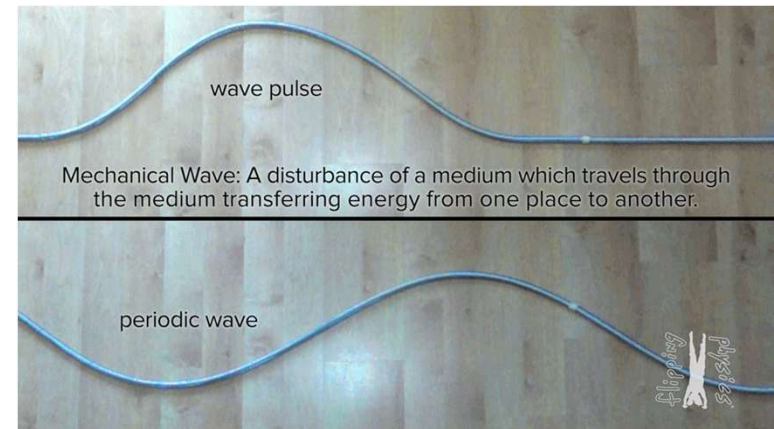
- ▶ Το οδεύον κύμα, ή ο παλμός, που αναγκάζει τα στοιχεία του διαταρασσόμενου μέσου να κινούνται παράλληλα στη διεύθυνση διάδοσης της διαταραχής ονομάζεται **διάμηκες κύμα**.
 - ▶ Τα ηχητικά κύματα είναι διαμήκη κύματα.
- ▶ Η διεύθυνση μετατόπισης των σπειρών είναι παράλληλη προς τη διεύθυνση διάδοσης.

Η διεύθυνση της μετατόπισης ενός τυχαίου στοιχείου του νήματος που βρίσκεται σε ένα σημείο Σ είναι κάθετη προς τη διεύθυνση διάδοσης (κόκκινο βέλος).

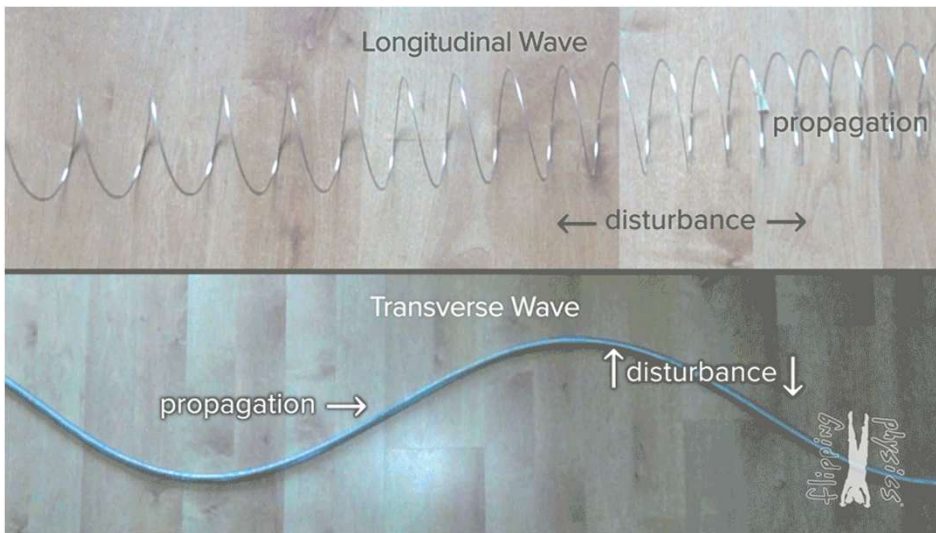
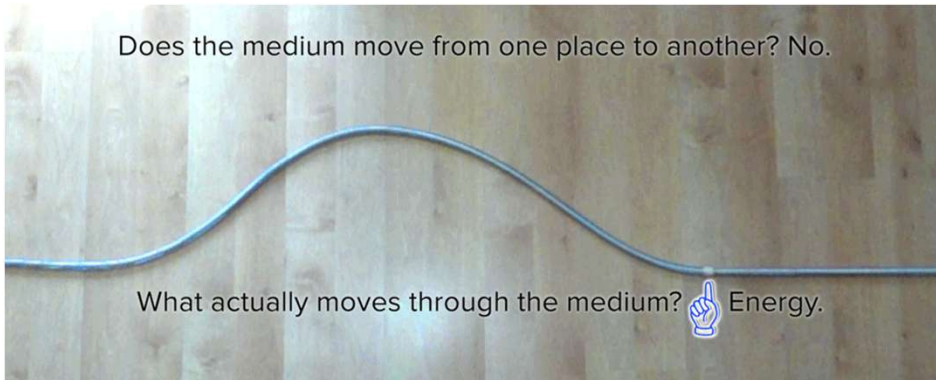


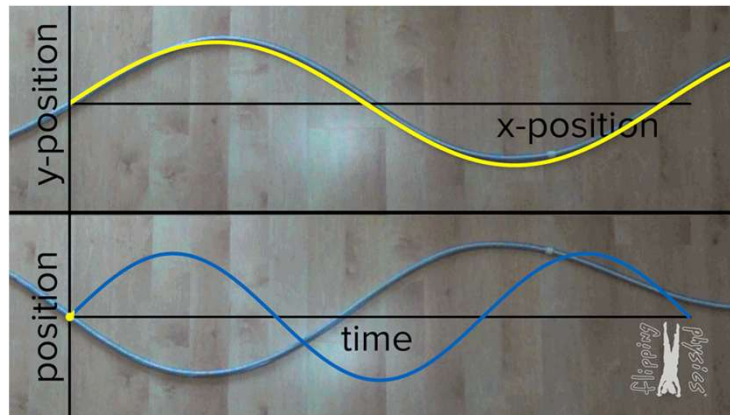
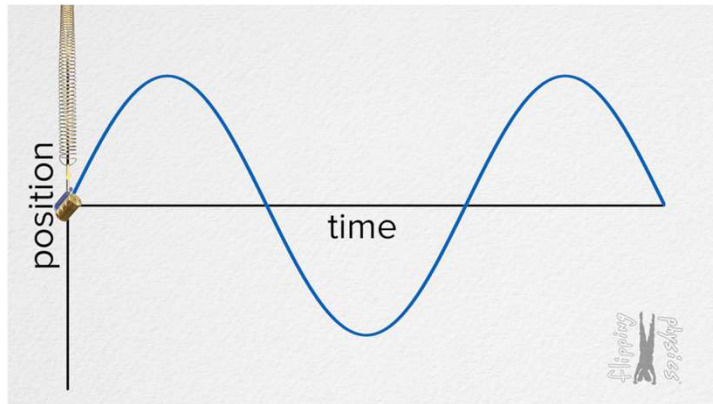
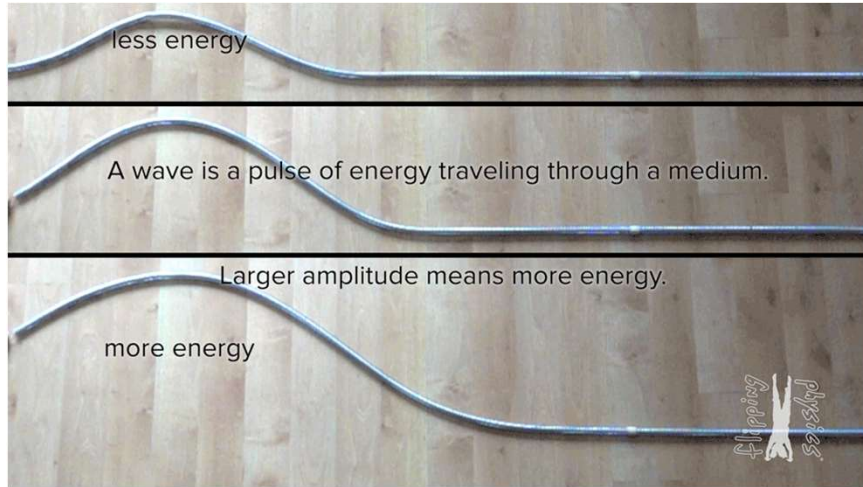
<https://www.flippingphysics.com/waves-gifs.html>

Εγκάρσιο κύμα



Διαμήκες κύμα





Σύνθετα κύματα-Παράδειγμα: Σεισμικά κύματα

- ▶ Κύματα P ή πρωτεύοντα κύματα

- ▶ Το «P» είναι το αρχικό γράμμα της αγγλικής λέξης primary (πρωτεύων).
- ▶ Κινούνται πιο γρήγορα από τα κύματα S, με 7-8 km/s.
- ▶ Είναι διαμήκη κύματα

- ▶ Κύματα S ή δευτερεύοντα κύματα

- ▶ Το «S» είναι το αρχικό γράμμα της αγγλικής λέξης secondary (δευτερεύων).
- ▶ Κινούνται πιο αργά από τα κύματα P, με 4-5 km/s.
- ▶ Είναι εγκάρσια κύματα

Ο σειсмоγράφος καταγράφει τα κύματα αυτά, από τα οποία μπορούμε να εξαγάγουμε πληροφορίες σχετικά με το επίκεντρο του σεισμού.

ΟΡΙΣΜΟΙ

ΚΥΜΑ

Κάθε διαταραχή η οποία διαδίδεται με πεπερασμένη ταχύτητα από σημείο σε σημείο στον υπόλοιπο χώρο χωρίς τη μεταφορά ύλης

ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΔΙΑΔΟΣΗΣ

Η ταχύτητα μετάδοσης της διαταραχής

ΑΡΜΟΝΙΚΟ ΚΥΜΑ

Εάν η αρχική διαταραχή, η οποία μεταδίδεται, είναι απλή αρμονική ταλάντωση [τα μη αρμονικά κύματα μπορούν να αναλυθούν σε σειρές όροι των οποίων αποτελούν αρμονικά κύματα]

ΩΚΥΤΗΤΑ

Η ταχύτητα των «μορίων» όταν εκτελούν αρμονική κίνηση [ΝΑ ΜΗ ΣΥΓΧΕΕΤΑΙ ΜΕ την ταχύτητα του κύματος]

ΕΓΚΑΡΣΙΑ & ΔΙΑΜΗΚΗ

Η ταλάντωση πραγματοποιείται κάθετα/παράλληλα στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος

ΟΡΙΣΜΟΙ

ΜΗΧΑΝΙΚΑ Η΄ ΕΛΑΣΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

Περιλαμβάνουν κίνηση σωμάτων, μεταφέρουν μηχανική ενέργεια. Π.χ. Ηχητικά, κύμα στην επιφάνεια μιας λίμνης

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

Κύματα που περιλαμβάνουν ταλαντώσεις ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου που πραγματοποιούνται κάθετα ή μια στην άλλη και κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος το οποίο ταξιδεύει πάντα με την ταχύτητα του φωτός (στο κενό 300000Km/s). Δεν απαιτούν την ύπαρξη ύλης για τη διάδοση του κύματος (το φως του ήλιου φθάνει στη γη...)

Μια απλή ταλάντωση (όχι κύμα) περιγράφει την αρμονική κίνηση ενός σώματος γύρω από μια θέση «ισορροπίας» οπότε μαθηματικά περιγράφεται από την «απομάκρυνση» του σώματος σε συνάρτηση του χρόνου.

Ένα κύμα περιγράφει τη διάδοση μιας ταλάντωσης στο χώρο οπότε θα πρέπει μαθηματικά να περιγράφει την «απομάκρυνση» του σώματος σε συνάρτηση όχι μόνο του χρόνου αλλά και της θέσης στο χώρο.

ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΥΜΑΤΟΣ

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

Κυματική εξίσωση

ψ το μέγεθος που περιγράφει τη διαταραχή που διαδίδεται

$$\psi(x, t) = f(x - ut)$$

Λύση της κυματικής εξίσωσης [συνάρτηση του $x-ut$!!!!]

Χωρική μεταβολή του κύματος: μπορούμε να τη "δούμε" αν φωτογραφίσουμε το κύμα για μια χρονική στιγμή π.χ. $t=0$

$$\psi(x, 0) = f(x)$$

$$f(x - ut)$$

Περιγράφει τη διάδοση της $f(x)$ με ταχύτητα u στο $+x$ άξονα

Χρονική μεταβολή του κύματος: Παρακολουθούμε πώς κινείται ένα σημείο (ένα x) σε συνάρτηση του χρόνου $\rightarrow$ Απλή αρμονική ταλάντωση.

$$\psi(x_o, t) = g(t)$$

ΚΥΜΑΤΑ

$$\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}_0 \sin[k(\mathbf{x} \pm u \mathbf{t})]$$

E_0 πλάτος $\rightarrow$ μέγιστη τιμή της συνάρτησης
 u ταχύτητα κύματος (ταχύτητα φάσης)

$$u = \pm \omega/k, \omega = 2\pi f, f = 1/T$$

k κυματαριθμός, $k = 2\pi/\lambda$ (λ μήκος κύματος)

$\mathbf{x}$ χωρική μεταβλητή

$\mathbf{t}$ χρονική μεταβλητή

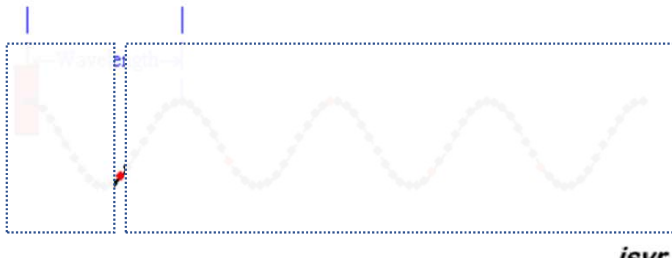
ΜΗΚΟΣ ΚΥΜΑΤΟΣ

Το διάστημα στο οποίο διαδίδεται η αρχική διαταραχή σε χρόνο μιας περιόδου

ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΥΜΑΤΙΚΗΣ

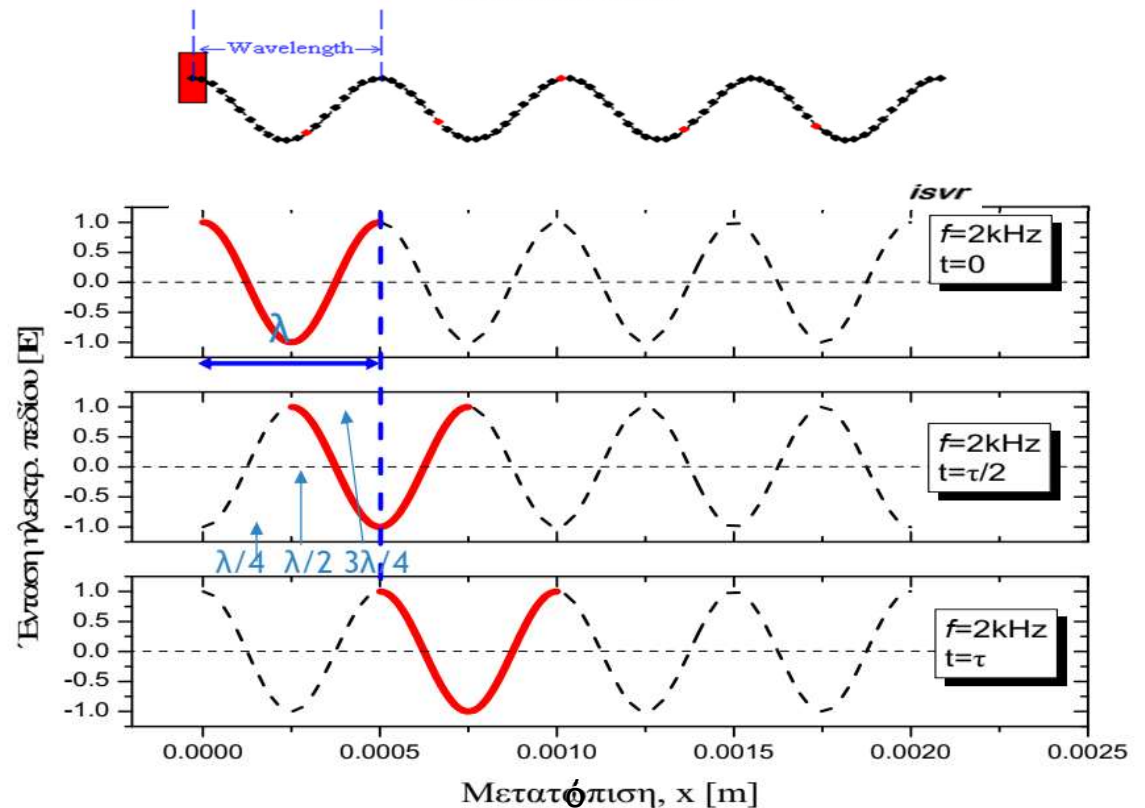
$$u = \lambda/T = \lambda f$$

Transverse Wave



$$\psi(x, t) = \psi_0 \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right]$$

Transverse Wave



ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΥΜΑΤΟΣ

$$\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}_0 \sin[k(\mathbf{x} \pm u \mathbf{t})]$$

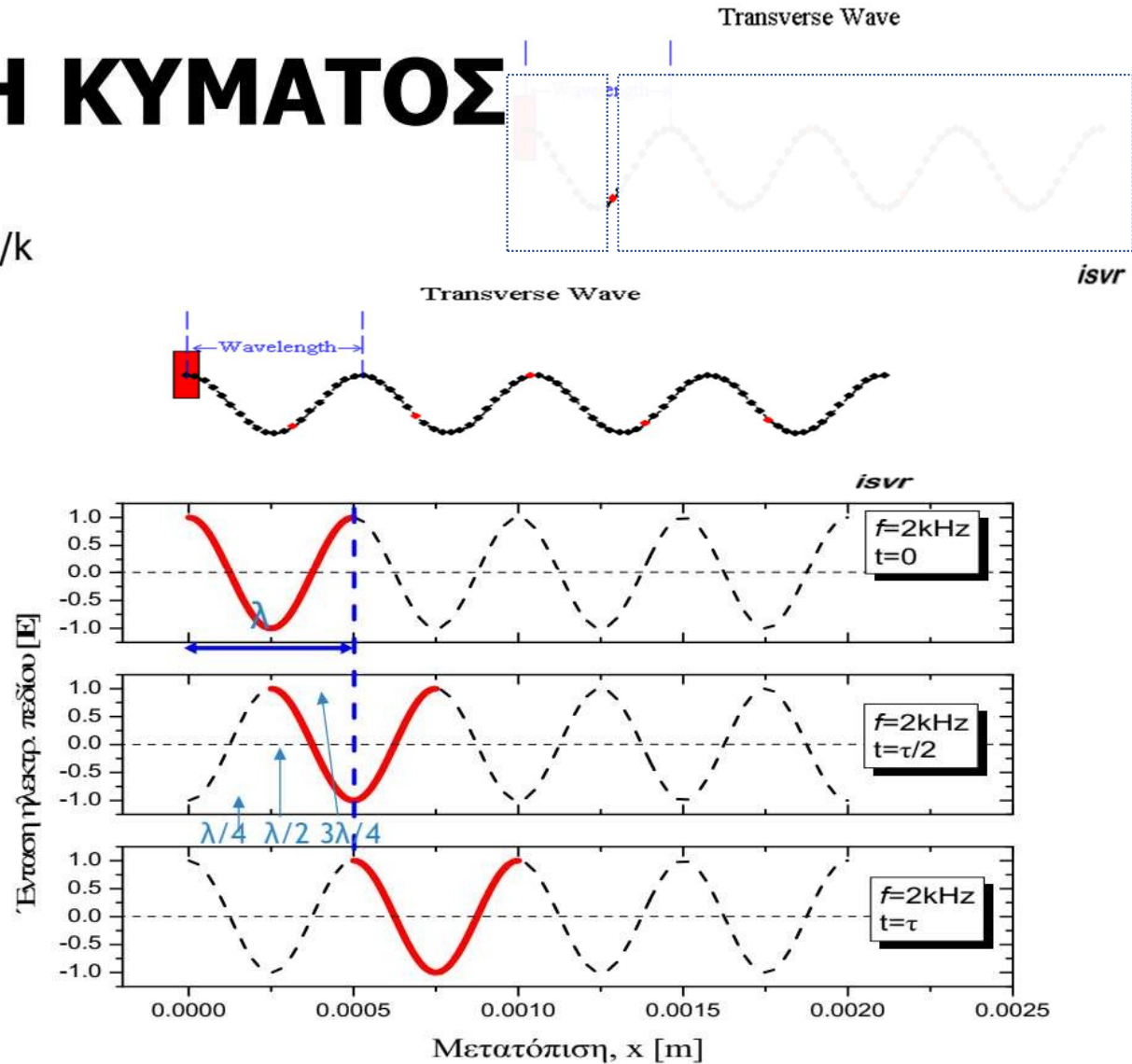
E_0 πλάτος $\rightarrow$ μέγιστη τιμή της συνάρτησης
 u ταχύτητα κύματος (ταχύτητα φάσης) $u = \pm \omega/k$
 k κυματαριθμός, $k = 2\pi/\lambda$ (λ μήκος κύματος)

$\mathbf{x}$ χωρική μεταβλητή

$\mathbf{t}$ χρονική μεταβλητή

ΓΙΑ ΚΑΘΕ ΣΗΜΕΙΟ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ
 ΜΑΣ ΔΩΣΕΙ ΤΗΝ ΕΞΑΡΤΗΣΗ ΤΗΣ
 «ΑΠΟΜΑΚΡΥΣΝΗΣ» ΣΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΤΟΥ
 ΧΡΟΝΟΥ

ΓΙΑ ΚΑΘΕ ΧΡΟΝΙΚΗ ΣΤΙΓΜΗ (στιγμιότυπο)
 ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΜΑΣ ΔΩΣΕΙ ΤΗ ΘΕΣΗ ΟΛΩΝ
 ΤΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ ΣΤΑ ΟΠΟΙΑ
 ΔΙΑΔΙΔΕΤΑΙ ΤΟ ΚΥΜΑ



ΜΕΡΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Υπακούουν στην αρχή του Fermat [κατά τη διάδοσή του ακολουθούν πάντα το συντομότερο δρόμο]

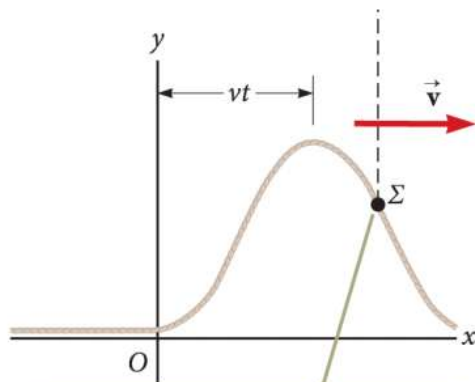
Διαθέτουν πόλωση

Υφίστανται περίθλαση, συμβολή, ανάκλαση και διάθλαση

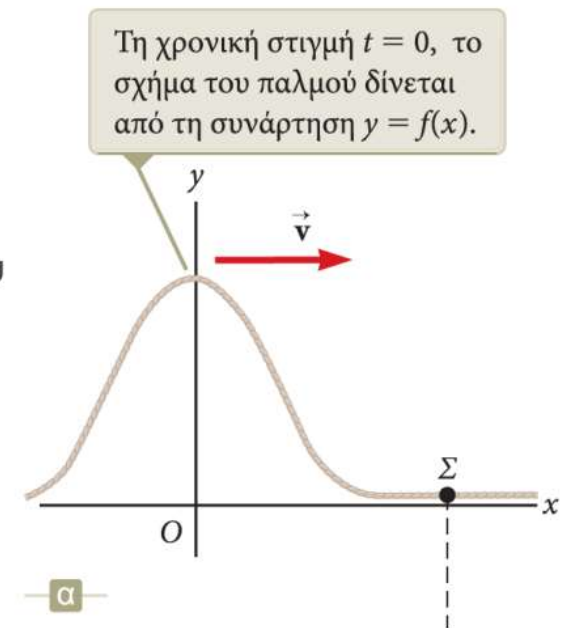
Εμφανίζουν το φαινόμενο Doppler

Οδεύων παλμός

- ▶ Στην εικόνα βλέπουμε το σχήμα του παλμού τη χρονική στιγμή $t = 0$.
- ▶ Το σχήμα της καμπύλης μπορεί να αναπαρασταθεί από μια μαθηματική συνάρτηση της μορφής $y(x, 0) = f(x)$.
 - ▶ Η συνάρτηση αυτή περιγράφει την εγκάρσια θέση y του στοιχείου του νήματος σε κάθε θέση x τη χρονική στιγμή $t = 0$.



Σε μια μεταγενέστερη χρονική στιγμή t , το σχήμα του παλμού παραμένει αμετάβλητο και η κατακόρυφη θέση ενός τυχαίου στοιχείου του μέσου σε οποιοδήποτε σημείο Σ δίνεται από τη συνάρτηση $y = f(x - vt)$.



Τη χρονική στιγμή $t = 0$, το σχήμα του παλμού δίνεται από τη συνάρτηση $y = f(x)$.

- ▶ Το μέτρο της ταχύτητας του παλμού είναι v .
- ▶ Τη χρονική στιγμή t , ο παλμός έχει διανύσει απόσταση vt .
- ▶ Το σχήμα του παλμού δεν μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου. Το στοιχείο του νήματος που βρίσκεται στη θέση x έχει την ίδια θέση y με το στοιχείο που βρισκόταν στο σημείο $x-vt$ τη στιγμή $t=0$.
- ▶ Η κατακόρυφη θέση του είναι τώρα $y(x, t) = y(x-vt, 0)$ ή γενικά $y(x, t) = f(x - vt)$.

Οδεύων παλμός

- ▶ Για έναν παλμό ο οποίος διαδίδεται προς τα δεξιά
 - ▶ $y(x, t) = f(x - vt)$
- ▶ Για έναν παλμό ο οποίος διαδίδεται προς τα αριστερά
 - ▶ $y(x, t) = f(x + vt)$
- ▶ Η συνάρτηση y είναι γνωστή και ως **κυματοσυνάρτηση** $y(x, t)$.
- ▶ Η κυματοσυνάρτηση δίνει την τεταγμένη y κάθε στοιχείου που βρίσκεται στο σημείο x σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t .
 - ▶ Η τεταγμένη y είναι η εγκάρσια θέση.
- ▶ Αν το t είναι σταθερό, η κυματοσυνάρτηση ονομάζεται **κυματομορφή (στιγμιότυπο)**.
 - ▶ Ορίζει μια καμπύλη που παριστάνει το γεωμετρικό σχήμα του παλμού τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

Ημιτονοειδή κύματα

▶ Το κύμα που παριστάνει η καμπύλη, η οποία φαίνεται στην εικόνα, είναι ένα **ημιτονοειδές ή αρμονικό κύμα**.

▶ Πρόκειται για την καμπύλη του γραφήματος της τριγωνομετρικής συνάρτησης $\sin \theta$ ως προς τη γωνία θ .

▶ Αυτό είναι το πιο απλό παράδειγμα ενός περιοδικού συνεχούς κύματος.

▶ Το κύμα κινείται προς τα δεξιά.

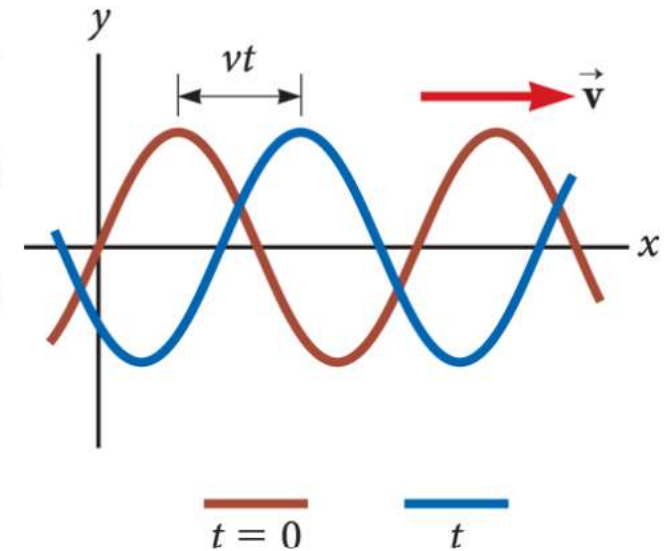
▶ Η καφέ καμπύλη περιγράφει την αρχική θέση.

▶ Καθώς το κύμα κινείται προς τα δεξιά, η καφέ καμπύλη θα φτάσει τελικά στη θέση της μπλε καμπύλης.

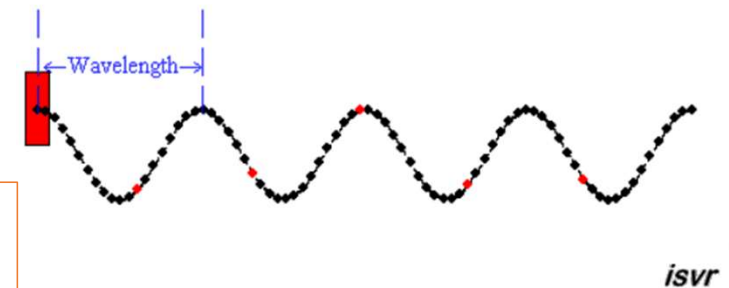
▶ Κάθε στοιχείο κινείται πάνω-κάτω εκτελώντας απλή αρμονική κίνηση.

▶ Αυτή η κίνηση είναι η κίνηση που εκτελούν τα στοιχεία του μέσου.

▶ Είναι σημαντικό να διαχωρίσουμε την κίνηση του κύματος από την κίνηση των στοιχείων του μέσου.



Transverse Wave



ΣΥΝΟΨΗ: Πλάτος, μήκος κύματος, περίοδος και συχνότητα

• Η μέγιστη μετατόπιση ονομάζεται **πλάτος** A .

• Το **μήκος κύματος** λ είναι η απόσταση μίας κορυφής από την επόμενη

• Η περίοδος, T , είναι το χρονικό διάστημα που απαιτείται ώστε δύο αντίστοιχα σημεία διαδοχικών κυμάνσεων να περάσουν από το ίδιο σημείο. Π.χ **ο χρόνος των αφίξεων δυο διαδοχικών κορυφών σε δεδομένο σημείο του χώρου.**

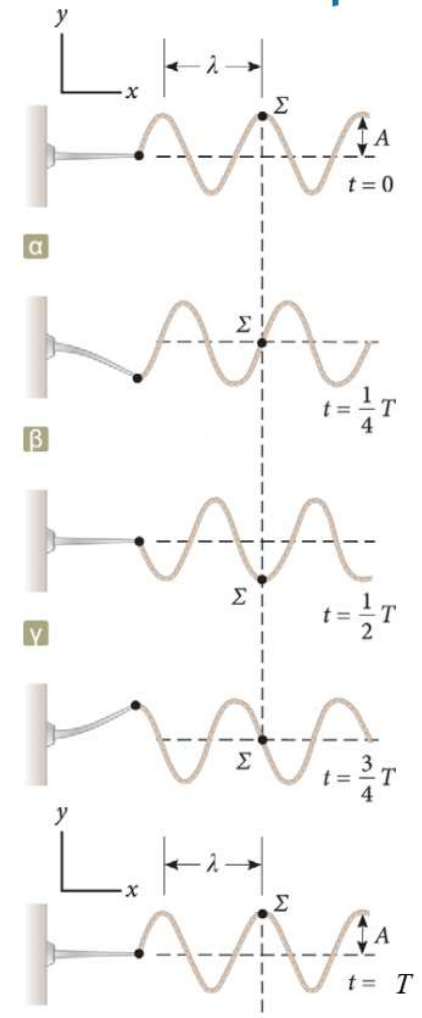
Η περίοδος του κύματος είναι ίδια με την περίοδο της απλής αρμονικής ταλάντωσης ενός στοιχείου του μέσου.

• Η **συχνότητα** f είναι ο αριθμός των κορυφών (ή οποιουδήποτε άλλου σημείου που ανήκει στο κύμα) που διέρχονται από ένα δεδομένο σημείο στη μονάδα του χρόνου.

Η συχνότητα του κύματος είναι ίδια με τη συχνότητα της απλής αρμονικής ταλάντωσης ενός στοιχείου του μέσου.

Κυματοσυνάρτηση

$$y(x,t) = A \overset{\text{COS}}{\sin} \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \right] \xrightarrow{v = \lambda/T} y(x,t) = A \overset{\text{COS}}{\sin} \left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right]$$
$$\xrightarrow{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f} \xrightarrow{k = 2\pi / \lambda} \boxed{y = A \overset{\text{COS}}{\sin}(kx - \omega t)}$$



Ημιτονοειδή κύματα σε νήματα

▶ Κάθε στοιχείο του νήματος ταλαντώνεται κατακόρυφα και εκτελεί απλή αρμονική κίνηση.

▶ Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι **κάθε στοιχείο του νήματος είναι ένας απλός αρμονικός ταλαντωτής που ταλαντώνεται με συχνότητα ίση με εκείνη της ταλάντωσης του ελασματος.**

▶ Ενώ κάθε στοιχείο ταλαντώνεται στον άξονα y , το κύμα διαδίδεται κατά μήκος του άξονα x με ταχύτητα μέτρου v .

▶ Τη χρονική στιγμή $t = 0$, $y = A \sin(kx - \omega t)$.

▶ Το μέτρο της εγκάρσιας ταχύτητας του στοιχείου είναι: $v_y = \frac{dy}{dt} \Big|_{x=\text{σταθερό}}$

▶ ή $v_y = -\omega A \cos(kx - \omega t)$

▶ Είναι διαφορετικό από το μέτρο της ταχύτητας του ίδιου του κύματος.

▶ Η εγκάρσια επιτάχυνση του στοιχείου είναι: $a_y = \frac{dv_y}{dt} \Big|_{x=\text{σταθερό}}$

▶ ή $a_y = -\omega^2 A \sin(kx - \omega t)$

▶ Η ταχύτητα v γίνεται μέγιστη στο σημείο $y = 0$.

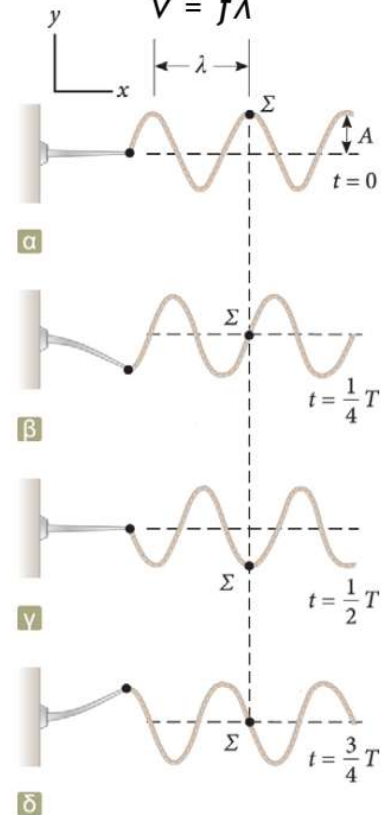
▶ Η επιτάχυνση a γίνεται μέγιστη στο σημείο $y = \pm A$.

▶ Η ταχύτητα του κύματος εξαρτάται από τα φυσικά χαρακτηριστικά του νήματος και την τάση που ασκείται στο νήμα.

$$f = 1/T$$

$$y = A \sin(kx - \omega t)$$

$$v = f\lambda$$



$$u = \sqrt{\frac{B}{d}}$$

Η γραμμική εξίσωση κύματος

- ▶ Οι κυματοσυναρτήσεις $y(x, t)$ είναι λύσεις της γραμμικής εξίσωσης κύματος.
- ▶ Η εξίσωση περιγράφει πλήρως την κίνηση του κύματος.
- ▶ Από αυτήν μπορούμε να πάρουμε την εξίσωση της ταχύτητας του κύματος.
- ▶ Η γραμμική εξίσωση κύματος είναι θεμελιώδης για πολλές μορφές κίνησης των κυμάτων.

$$\text{Γενική έκφραση} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \text{Κύμα κατά μήκος νήματος} \quad \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

- ▶ Το y παριστάνει διάφορες θέσεις.
- ▶ Για ένα νήμα, το y είναι η κατακόρυφη μετατόπιση των στοιχείων του.
- ▶ Για ένα ηχητικό κύμα που διαδίδεται σε ένα αέριο, το y είναι η διαμήκης μετατόπιση των στοιχείων του αερίου από τη θέση ισορροπίας τους.
- ▶ Για ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα, το y είναι μια συνιστώσα του ηλεκτρικού ή του μαγνητικού πεδίου.

Υπέρθεση και συμβολή

Αρχή της υπέρθεσης

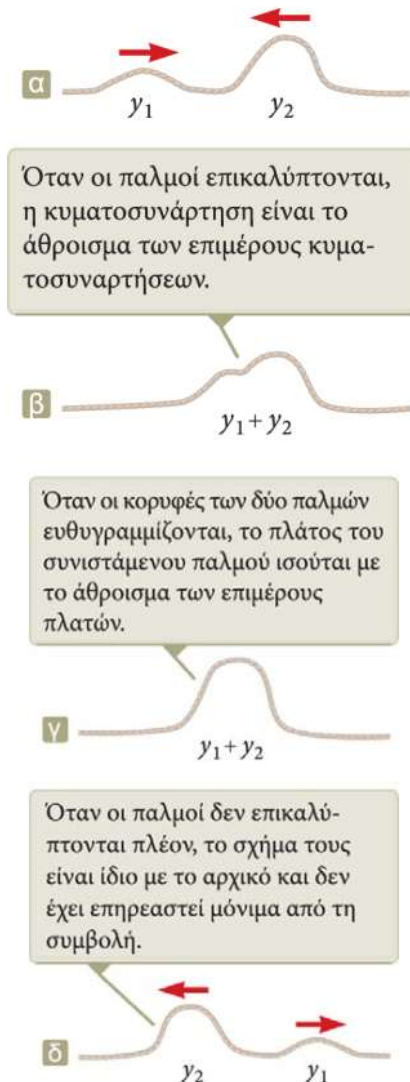
- ▶ Τα κύματα μπορούν να συνδυαστούν στην ίδια θέση του χώρου.
- ▶ Μπορούμε να αναλύουμε τέτοιους συνδυασμούς κυμάτων χρησιμοποιώντας την αρχή της υπέρθεσης (ή αρχή της επαλληλίας):
 - ▶ Αν σε ένα μέσο διαδίδονται δύο ή περισσότερα κύματα, η συνισταμένη τιμή της κυματοσυνάρτησης σε οποιοδήποτε σημείο είναι το αλγεβρικό άθροισμα των τιμών των κυματοσυναρτήσεων των επιμέρους κυμάτων.
- ▶ Τα κύματα που ακολουθούν αυτή την αρχή ονομάζονται γραμμικά.
 - ▶ Στην περίπτωση των μηχανικών κυμάτων, τα γραμμικά κύματα συχνά έχουν πλάτος πολύ μικρότερο από το μήκος τους.

Υπέρθεση και συμβολή

- ▶ Δύο οδεύοντα κύματα μπορούν να περάσουν το ένα μέσα από το άλλο χωρίς να αλλοιωθούν.
 - ▶ Αυτή είναι μία από τις συνέπειες της αρχής της υπέρθεσης.
- ▶ Όταν στην ίδια περιοχή του χώρου συνδυάζονται δύο διαφορετικά κύματα και παράγουν ένα συνιστάμενο κύμα, το φαινόμενο ονομάζεται συμβολή.

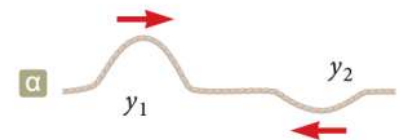
Παράδειγματα υπέρθεσης

- ▶ Δύο παλμοί διαδίδονται προς αντίθετες κατευθύνσεις (α).
 - ▶ Η κυματοσυνάρτηση του παλμού που κινείται προς τα δεξιά είναι η y_1 και η κυματοσυνάρτηση του παλμού που κινείται προς τα αριστερά είναι η y_2 .
- ▶ Οι παλμοί έχουν ίδιο μέτρο ταχύτητας, αλλά διαφορετικά σχήματα.
- ▶ Η μετατόπιση των στοιχείων του μέσου είναι θετική και για τους δύο παλμούς.
- ▶ Όταν οι παλμοί αρχίζουν να επικαλύπτονται (β), η συνισταμένη κυματοσυνάρτηση είναι $y_1 + y_2$.
- ▶ Όταν συναντώνται οι κορυφές των παλμών (γ), ο συνιστάμενος παλμός έχει μεγαλύτερο πλάτος από εκείνο των αρχικών παλμών.
- ▶ Οι δύο παλμοί χωρίζονται (δ).
 - ▶ Συνεχίζουν να κινούνται προς την αρχική τους κατεύθυνση.
 - ▶ Το σχήμα τους παραμένει αμετάβλητο.
- ▶ Αυτό το είδος υπέρθεσης ονομάζεται **ενισχυτική συμβολή**.



Παράδειγματα υπέρθεσης

- ▶ Δύο παλμοί διαδίδονται προς αντίθετες κατευθύνσεις.
- ▶ Ο ένας παλμός είναι ανεστραμμένος σε σχέση με τον άλλο.
- ▶ Όταν οι παλμοί επικαλύπτονται, η συνισταμένη κυματοσυνάρτηση είναι $y_1 + y_2$.
- ▶ Αυτό το είδος υπέρθεσης ονομάζεται **καταστρεπτική συμβολή**.
- ▶ **Ενισχυτική συμβολή** συμβαίνει όταν οι μετατοπίσεις που προκαλούν οι δύο παλμοί έχουν την ίδια κατεύθυνση.
 - ▶ Το πλάτος του συνιστάμενου παλμού είναι μεγαλύτερο από το πλάτος των επιμέρους παλμών.
- ▶ **Καταστρεπτική συμβολή** συμβαίνει όταν οι μετατοπίσεις που προκαλούν οι δύο παλμοί έχουν αντίθετες κατευθύνσεις.
 - ▶ Το πλάτος του συνιστάμενου παλμού είναι μικρότερο από το πλάτος των επιμέρους παλμών.



Όταν οι παλμοί επικαλύπτονται, η κυματοσυνάρτηση είναι το άθροισμα των επιμέρους κυματοσυναρτήσεων.



Όταν οι κορυφές των δύο παλμών ευθυγραμμίζονται, το πλάτος του συνιστάμενου παλμού ισούται με τη διαφορά μεταξύ των επιμέρους πλατών.



Όταν οι παλμοί δεν επικαλύπτονται πλέον, το σχήμα τους είναι ίδιο με το αρχικό και δεν έχει επηρεαστεί μόνιμα από τη συμβολή.



Superposition: The addition of waves when they interfere with one another.

Destructive Interference

Constructive Interference



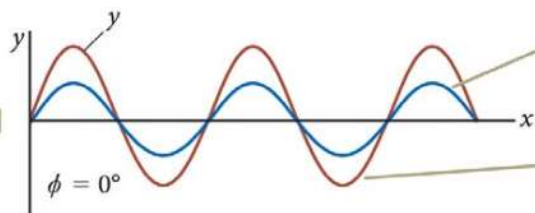
Υπέρθεση ημιτονοειδών κυμάτων

- ▶ Υποθέτουμε ότι δύο κύματα διαδίδονται προς την ίδια κατεύθυνση σε ένα γραμμικό μέσο, και έχουν ίδια συχνότητα, μήκος, και πλάτος.
- ▶ Μόνο η φάση τους είναι διαφορετική:
 - ▶ $y_1 = A \sin(kx - \omega t)$
 - ▶ $y_2 = A \sin(kx - \omega t + \phi)$
 - ▶ $y = y_1 + y_2 = 2A \cos(\phi / 2) \sin(kx - \omega t + \phi / 2)$
- ▶ Η συνισταμένη κυματοσυνάρτηση y είναι επίσης ημιτονοειδής.
- ▶ Το συνιστάμενο κύμα έχει ίδια συχνότητα και μήκος κύματος με τα αρχικά κύματα.
- ▶ Το πλάτος του συνισταμένου κύματος είναι $2A \cos(\phi / 2)$.
- ▶ Η φάση του συνισταμένου κύματος είναι $\phi / 2$.

Ενισχυτική και καταστρεπτική συμβολή ημιτονοειδών κυμάτων

▶ Όταν $\phi = 0$, τότε $\cos(\phi/2) = 1$.

- ▶ Το πλάτος του συνισταμένου κύματος είναι $2A$.
 - ▶ Οι κορυφές των δύο κυμάτων αντιστοιχούν στα ίδια σημεία του χώρου.
- ▶ Τα κύματα βρίσκονται παντού σε φάση.
- ▶ Τα κύματα συμβάλλουν ενισχυτικά.
- ▶ Γενικά, ενισχυτική συμβολή παρατηρείται όταν $\cos(\phi/2) = \pm 1$.
 - ▶ Δηλαδή, όταν $\phi = 0, 2\pi, \dots \text{rad}$.
 - ▶ Η γωνία ϕ είναι άρτιο πολλαπλάσιο του π .



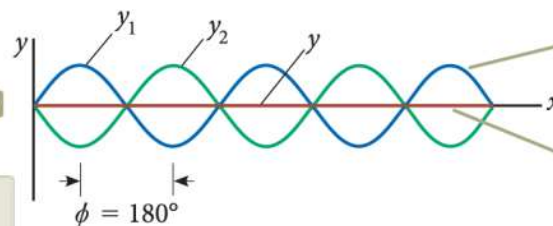
Τα επιμέρους κύματα είναι σε φάση και επομένως δεν μπορούμε να τα ξεχωρίσουμε.

Ενισχυτική συμβολή: τα πλάτη των κυμάτων προστίθενται.

▶ Όταν $\phi = \pi$, τότε $\cos(\phi/2) = 0$.

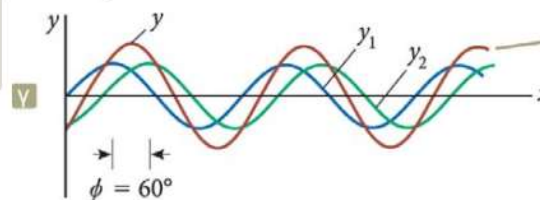
- ▶ Το ίδιο ισχύει όταν η γωνία ισούται με οποιοδήποτε περιττό πολλαπλάσιο του π .

- ▶ Το συνισταμένο κύμα έχει μηδενικό πλάτος.
- ▶ Τα κύματα συμβάλλουν καταστρεπτικά.
- ▶ Όταν η γωνία ϕ δεν είναι μηδενική ή ισούται με κάποιο ακέραιο πολλαπλάσιο του π , το συνισταμένο κύμα έχει πλάτος μεταξύ 0 και $2A$.
- ▶ Και σε αυτή την περίπτωση, οι κυματοσυναρτήσεις αθροίζονται.
- ▶ Η συμβολή δεν είναι ούτε ενισχυτική ούτε καταστρεπτική.



Τα επιμέρους κύματα έχουν διαφορά φάσης 180° .

Καταστρεπτική συμβολή: τα κύματα αλληλοακυρώνονται.



Η ενδιάμεση αυτή συμβολή δεν είναι ούτε ενισχυτική ούτε καταστρεπτική.

Συμβολή ημιτονοειδών κυμάτων - Σύνοψη

ίδιο πλάτος

- ▶ Ενισχυτική συμβολή παρατηρείται όταν $\phi = n\pi$, όπου το n είναι άρτιος ακέραιος (συμπεριλαμβανομένου του 0).
 - ▶ Το πλάτος του συνισταμένου κύματος είναι $2A$.
- ▶ Καταστρεπτική συμβολή παρατηρείται όταν $\phi = n\pi$, όπου το n είναι περιττός ακέραιος.
 - ▶ Το πλάτος είναι 0.
- ▶ Η γενική συμβολή παρατηρείται όταν $0 < \phi < n\pi$.
 - ▶ Για το πλάτος του συνισταμένου κύματος ισχύει $0 < A_{\text{συν.}} < 2A$

διαφορετικό πλάτος

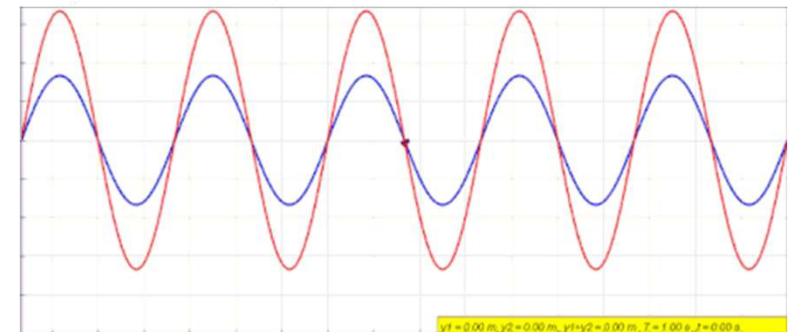
- ▶ Ενισχυτική συμβολή παρατηρείται όταν $\phi = n\pi$, όπου το n είναι άρτιος ακέραιος (συμπεριλαμβανομένου του 0).
 - ▶ Το πλάτος του συνισταμένου κύματος είναι ίσο με το άθροισμα του πλάτους των κυμάτων.
- ▶ Η καταστρεπτική συμβολή παρατηρείται όταν $\phi = n\pi$, όπου το n είναι περιττός ακέραιος.
 - ▶ Το πλάτος του συνισταμένου κύματος είναι μικρότερο, αλλά τα κύματα δεν αλληλοαναιρούνται πλήρως.

Στάσιμα κύματα

- ▶ Υποθέτουμε ότι δύο κύματα με ίδιο πλάτος, συχνότητα, και μήκος διαδίδονται στο ίδιο μέσο προς αντίθετες κατευθύνσεις.
- ▶ Τα κύματα συνδυάζονται σύμφωνα με το μοντέλο της συμβολής κυμάτων.
- ▶ $y_1 = A \sin(kx - \omega t)$ και
- ▶ $y_2 = A \sin(kx + \omega t)$
- ▶ Συμβάλλουν σύμφωνα με την αρχή της υπέρθεσης.
- ▶ Το συνιστάμενο κύμα είναι $y = (2A \sin kx) \cos \omega t$.
- ▶ Αυτή η εξίσωση είναι η κυματοσυνάρτηση ενός στάσιμου κύματος.
 - ▶ Δεν περιέχει κάποιον όρο $kx - \omega t$, οπότε δεν περιγράφει οδεύον κύμα.
- ▶ Όταν παρατηρούμε ένα στάσιμο κύμα, δεν αντιλαμβανόμαστε καμία κίνηση στην κατεύθυνση διάδοσης κάποιου από τα αρχικά κύματα.

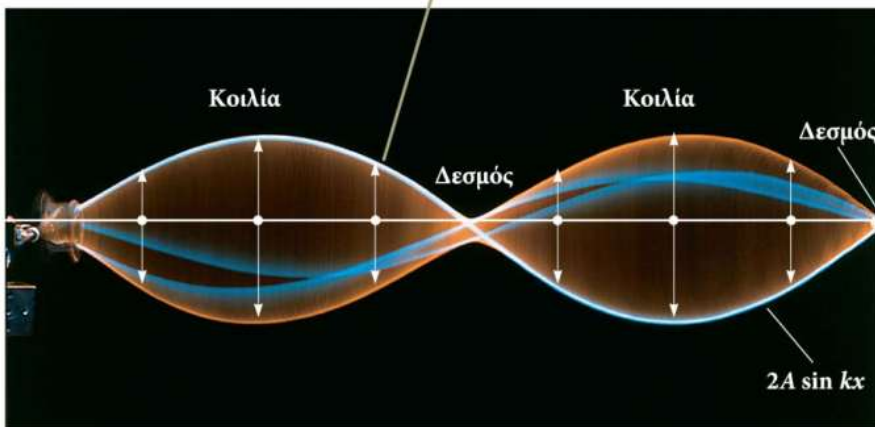
[\(61\) 2D Standing Waves with Sand \(Variable Frequency\) - YouTube](#)

[\(61\) Three-Dimensional Mid-Air Acoustic Manipulation \[Acoustic Levitation\] \(2014-\) - YouTube](#)



Παράδειγμα στάσιμου κύματος

Το πλάτος της κατακόρυφης ταλάντωσης οποιουδήποτε στοιχείου της χορδής εξαρτάται από την οριζόντια θέση του. Κάθε στοιχείο ταλαντώνεται μέσα στα όρια της περιβάλλουσας συνάρτησης $2A \sin kx$.



▶ Στάσιμο περίγραμμα που προκύπτει από την υπέρθεση δύο πανομοιότυπων κυμάτων που διαδίδονται προς αντίθετες κατευθύνσεις.

▶ Το πλάτος της απλής αρμονικής κίνησης κάθε στοιχείου είναι $2A \sin kx$.

▶ Εξαρτάται από τη θέση x του στοιχείου στο μέσο.

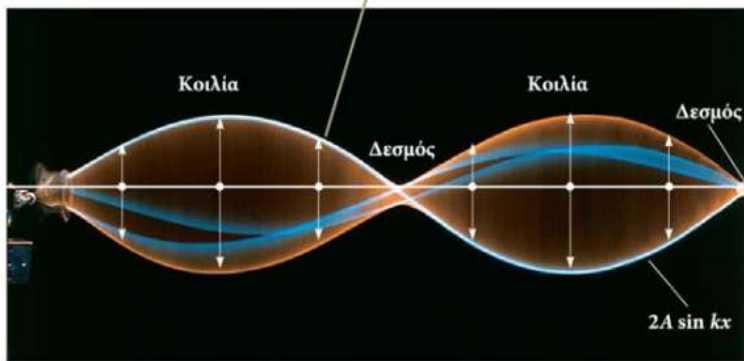
▶ Κάθε στοιχείο εκτελεί ταλάντωση με κυκλική συχνότητα ω .

▶ Για να περιγράψουμε τα κύματα, χρησιμοποιούμε τρία είδη πλάτους.

- ▶ Το πλάτος των επιμέρους κυμάτων, A .
- ▶ Το πλάτος της απλής αρμονικής κίνησης των στοιχείων του μέσου διάδοσης: $2A \sin kx$ (Κάθε στοιχείο του στάσιμου κύματος ταλαντώνεται στο πλαίσιο της περιβάλλουσας συνάρτησης $2A \sin kx$)
- ▶ Το πλάτος του στάσιμου κύματος, $2A$

Στάσιμα κύματα, ορισμοί

Το πλάτος της κατακόρυφης ταλάντωσης οποιουδήποτε στοιχείου της χορδής εξαρτάται από την οριζόντια θέση του. Κάθε στοιχείο ταλαντώνεται μέσα στα όρια της περιβάλλουσας συνάρτησης $2A \sin kx$.



► Τα σημεία μηδενικού πλάτους ονομάζονται **δεσμοί** ή **κόμβοι**.

► Αντιστοιχούν σε τιμές του x που ικανοποιούν τη σχέση

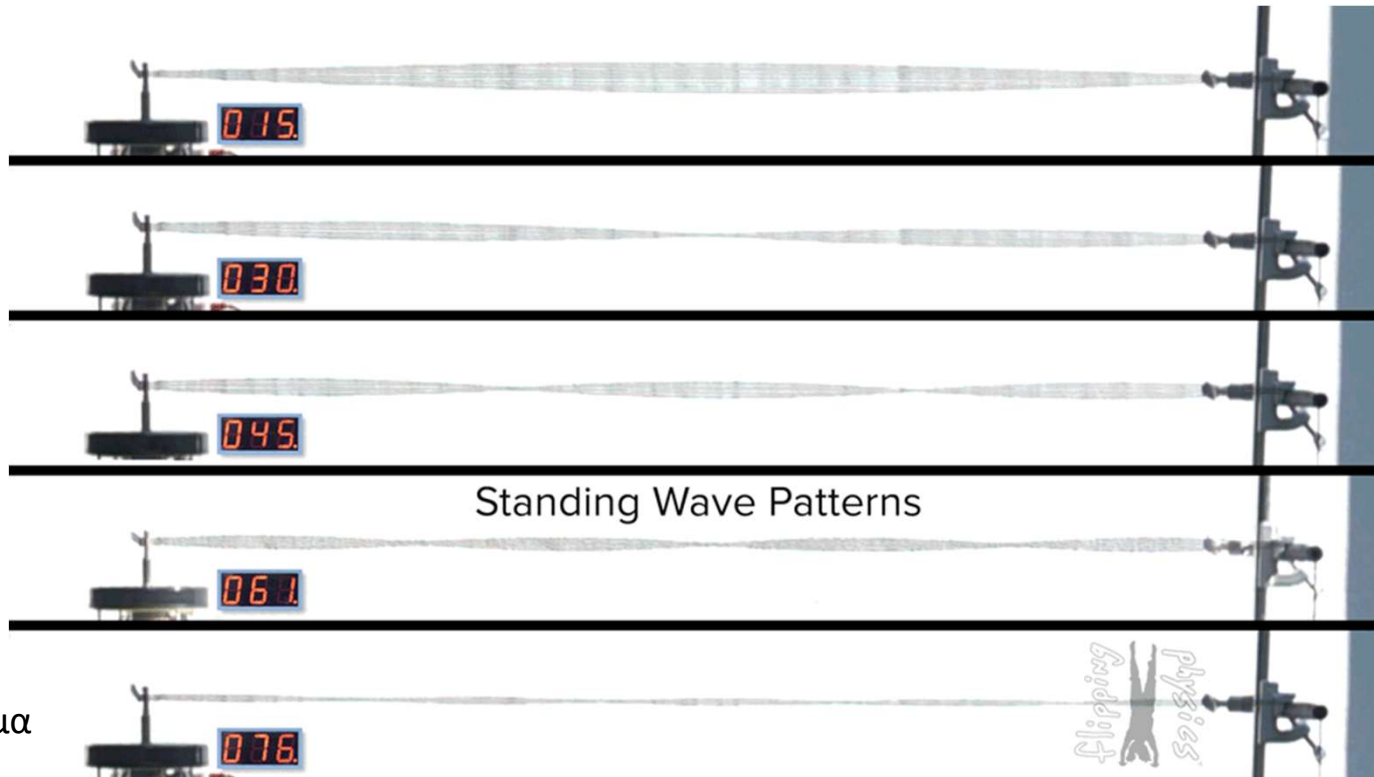
$$x = \frac{n\lambda}{2} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

► Τα σημεία του μέσου στα οποία παρατηρείται μέγιστη μετατόπιση $2A$ ονομάζονται **κοιλίες** ή **αντιδεσμοί**.

► Αντιστοιχούν σε τιμές του x που ικανοποιούν τη σχέση

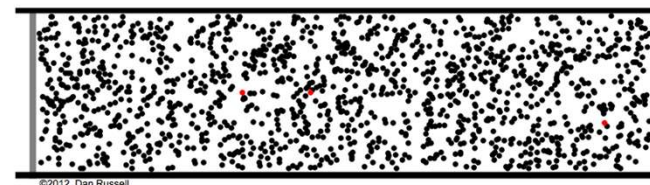
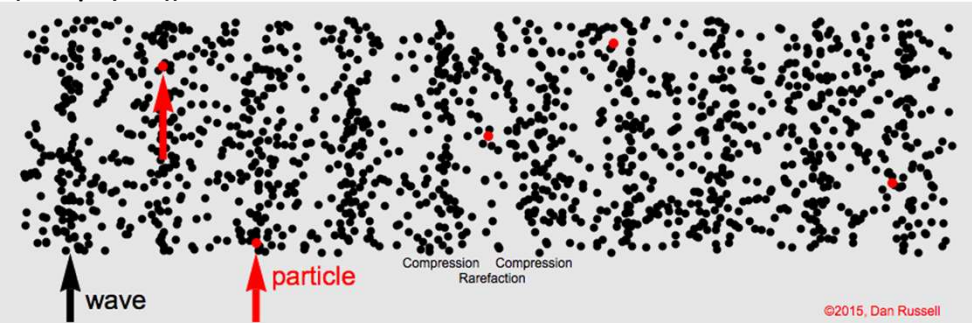
$$x = \frac{n\lambda}{4} \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

- Η απόσταση μεταξύ διαδοχικών κοιλιών είναι ίση με $\lambda/2$.
- Η απόσταση μεταξύ διαδοχικών δεσμών είναι ίση με $\lambda/2$.
- Η απόσταση μεταξύ ενός δεσμού και της επόμενης κοιλίας είναι ίση με $\lambda/4$.

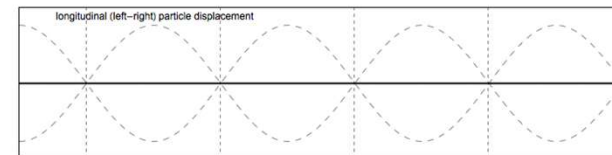


Στάσιμο κύμα
Χορδή πακτωμένη
στα δύο άκρα
(εγκάρσιο)

Ηχητικό οδεύον κύμα
(διαμήκες)



Ηχητικό στάσιμο
κύμα σωλήνας
κλειστός στα
άκρα
(διαμήκες)



<https://www.scienceflip.com.au/subjects/physics/wavesandthermodynamics/learn17/>

ΣΥΜΒΟΛΗ - ΦΩΣ

Το φαινόμενο που παρατηρούμε όταν δύο ή περισσότερα κύματα
“αλληλεπικαλύπτονται” στο χώρο



Αρχή της επαλληλίας: όταν δύο ή περισσότερα κύματα αλληλεπικαλύπτονται η προκύπτουσα μετατόπιση σε οποιοδήποτε σημείο και οποιαδήποτε χρονική στιγμή βρίσκεται από την πρόσθεση των στιγμιαίων μετατοπίσεων που θα παράγονταν στο σημείο αυτό από καθένα από τα κύματα ξεχωριστά

Μετατόπιση: πραγματική μετατόπιση για κύματα νερού, συνιστώσα ηλεκτρικού ή μαγνητικού πεδίου για την περίπτωση ΗΜΓ κυμάτων

Πηγές σε φάση: ταλαντώνονται συγχρονισμένα (π.χ. Αναδευτήρες σε νερό, ηχεία σε κοινό ενισχυτή, κεραίες ραδιοφώνου που τροφοδοτούνται από τον ίδιο πομπό, δύο σχισμές που φωτίζονται από την ίδια μονοχρωματική ακτινοβολία)

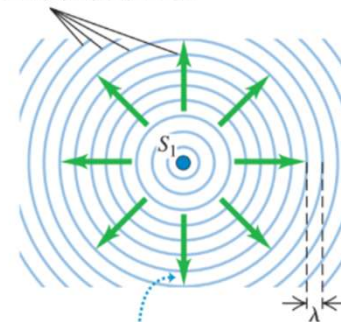
Τα φαινόμενα συμβολής **γίνονται πιο εύκολα αντιληπτά** όταν συνδυάζουμε ημιτονοειδή κύματα με μία μόνο συχνότητα f και μήκος κύματος λ .

Στην Οπτική τα ημιτονοειδή κύματα είναι χαρακτηριστικά του **μονοχρωματικού φωτός** (φως ενός μόνο χρώματος). Ενώ είναι σχετικά εύκολο να κάνουμε υδάτινα ή ηχητικά κύματα μίας μόνο συχνότητας, οι κοινές πηγές φωτός δεν εκπέμπουν μονοχρωματικό (μίας μόνο συχνότητας) φως.

Τα φωτεινά κύματα μπορούν (και το κάνουν) να διαδίδονται σε δύο ή σε τρεις διαστάσεις, όπως μπορεί κάθε είδος κύματος που διαδίδεται σε ένα δισδιάστατο ή τρισδιάστατο μέσο.

35.1 Ένα «στιγμιότυπο» ημιτονοειδών κυμάτων συχνότητας f και μήκους κύματος λ που απομακρύνονται από την πηγή S_1 προς όλες τις διευθύνσεις.

Μέτωπα κύματος: κορυφές του κύματος (συχνότητα f) που διαχωρίζονται από ένα μήκος κύματος λ



Τα μέτωπα κύματος απομακρύνονται από την πηγή S_1 με την κυματική ταχύτητα $v = f\lambda$.

ΣΥΜΒΟΛΗ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ ΑΠΟ ΔΥΟ ΠΗΓΕΣ

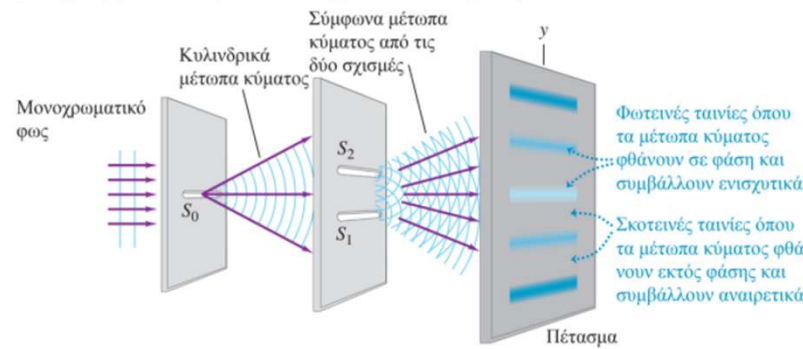
Το Σχ. 35.5a δείχνει ένα από τα πρώτα ποσοτικά πειράματα για την ανάδειξη της συμβολής του φωτός από δύο πηγές, το οποίο πραγματοποιήθηκε για πρώτη φορά το 1800 από τον Άγγλο επιστήμονα Thomas Young (Τόμας Γιανγκ).

(a) Το πείραμα του Young, με το οποίο επιδεικνύεται η συμβολή του φωτός που διέρχεται μέσω δύο σχισμών. Μία εικόνα φωτεινών και σκοτεινών περιοχών εμφανίζεται στο πέτασμα (δείτε Σχ. 35.6).

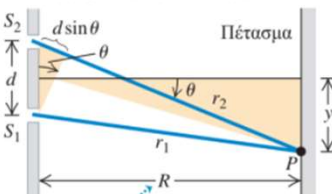
(b) Γεωμετρική ανάλυση του πειράματος του Young. Για την περίπτωση που φαίνεται, $r_2 > r_1$ και αμφότερα τα y και θ είναι θετικά. Εάν το σημείο P είναι στην άλλη πλευρά –ως προς το κέντρο του πετάσματος–, τότε $r_2 < r_1$ και αμφότερα τα y και θ είναι αρνητικά.

(c) Προσεγγιστική γεωμετρική επίλυση, όταν η απόσταση R ως το πέτασμα είναι πολύ μεγαλύτερη από την απόσταση d μεταξύ των σχισμών.

(a) Συμβολή φωτεινών κυμάτων που διέρχονται από δύο σχισμές

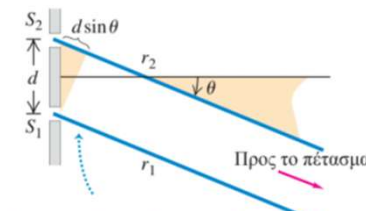


(b) Ακριβής γεωμετρία (όπως φαίνεται από το πλάι)

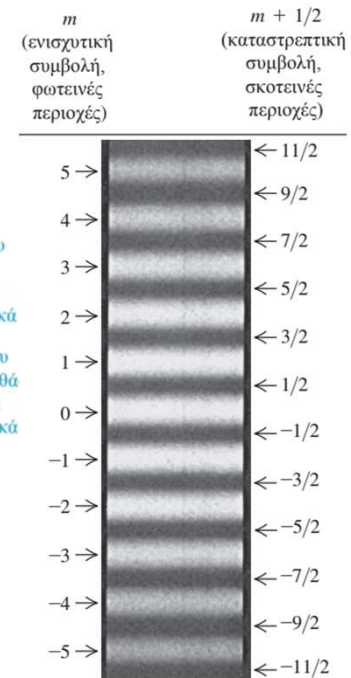


Σε πραγματικές συνθήκες, η απόσταση R ως το πέτασμα είναι συνήθως πολύ μεγαλύτερη από την απόσταση d μεταξύ των σχισμών...

(c) Προσεγγιστική γεωμετρία

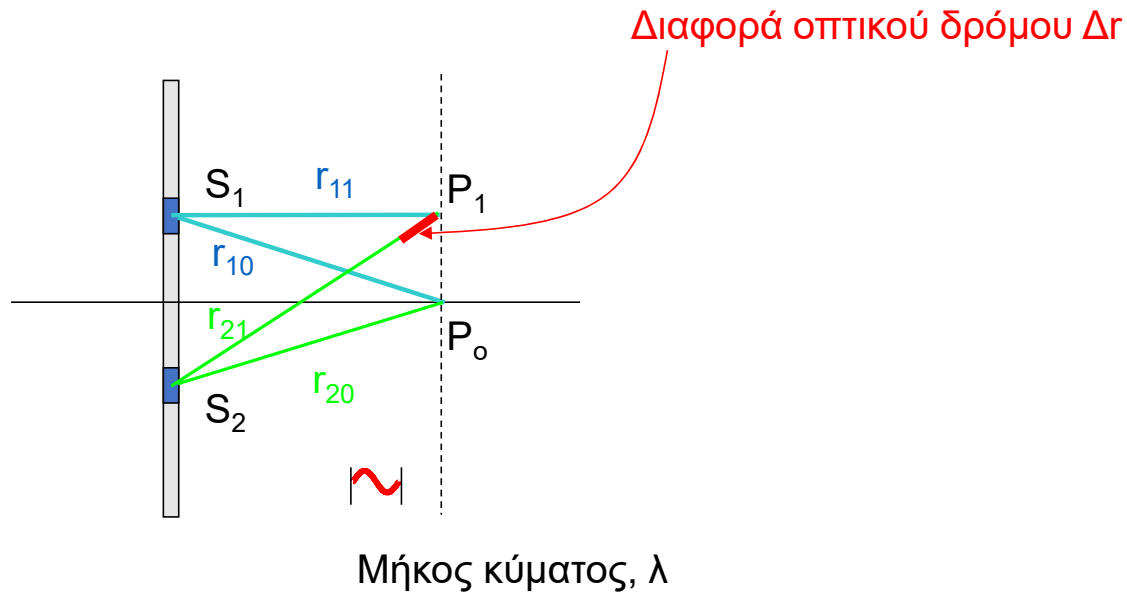


... έτσι μπορούμε να διαχειριστούμε τις ακτίνες ως παράλληλες, οπότε η διαφορά δρόμου είναι απλά $r_2 - r_1 = d \sin \theta$.



35.6 Φωτογραφία κροσσών συμβολής που παράγονται σε ένα πέτασμα στο πείραμα των δύο σχισμών του Young.

Σχηματική επεξήγηση του φαινομένου της συμβολής Πείραμα Young



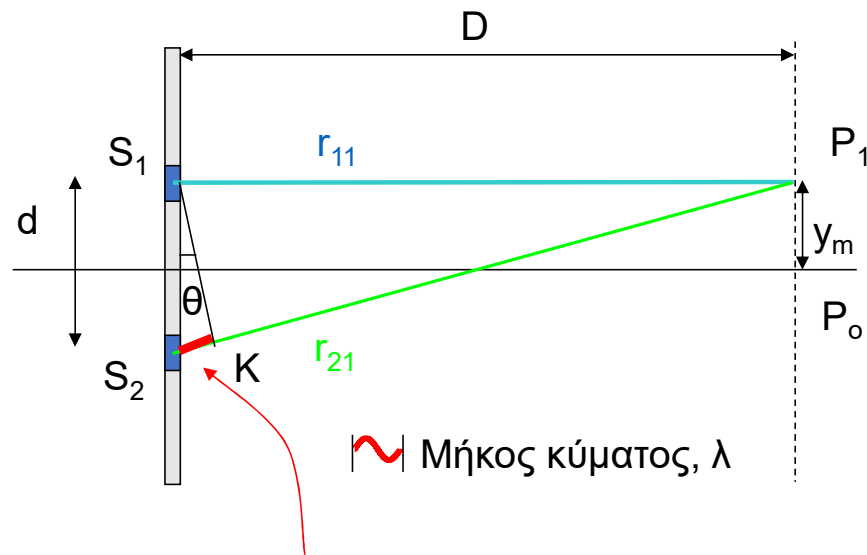
Όταν τα κύματα φθάνουν σε ένα σημείο σε φάση έχουμε ενισχυτική συμβολή

$$\Delta r = |r_{21} - r_{11}| = m\lambda \quad (m=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

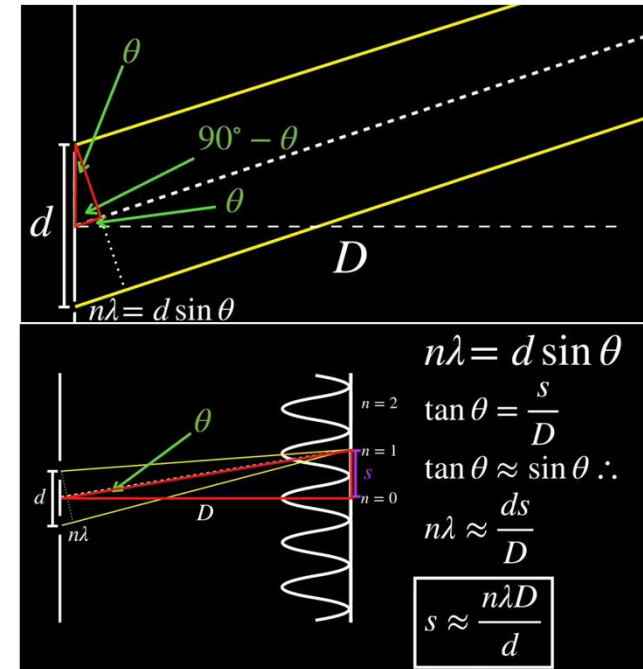
Όταν τα κύματα φθάνουν σε ένα σημείο με διαφορά φάσης μισής περιόδου έχουμε αναιρετική /καταστροφική συμβολή

$$\Delta r = |r_{21} - r_{11}| = (m + 1/2)\lambda \quad (m=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

Υπολογισμός θέσης μεγίστων συμβολής Απόσταση $D \gg \alpha$



Διαφορά οπτικού δρόμου Δr

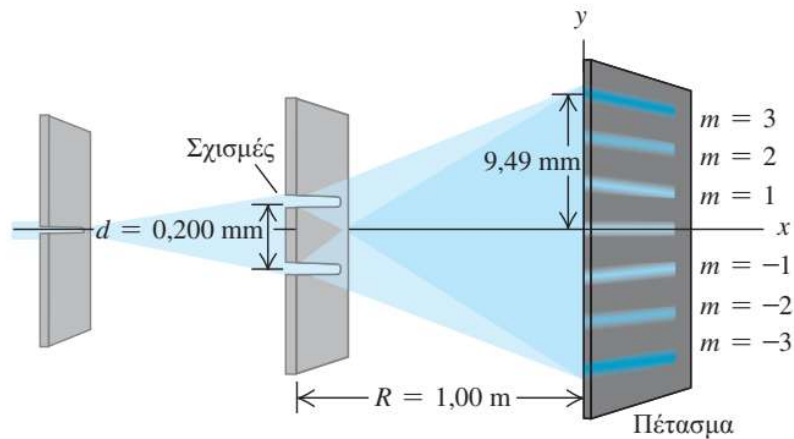


$d \sin \theta = \Delta r = m\lambda \rightarrow$ για $D \gg d$ δηλ. όταν $S_1 K S_2 \approx 90^\circ$, $\theta \approx 0$ και $\sin \theta \approx \tan \theta = y_m/D$
Σε κάθε θέση

$$y_m = D m\lambda/d \text{ έχουμε max.}$$

Το Σχ. 35.7 δείχνει ένα πείραμα συμβολής από δύο σχισμές, στο οποίο η απόσταση μεταξύ των σχισμών είναι 0,200 mm και το πέτασμα βρίσκεται σε απόσταση 1,00 m από αυτές. Ο φωτεινός κροσσός $m = 3$ στο σχήμα βρίσκεται σε απόσταση 9,49 mm από τον κεντρικό κροσσό. Βρείτε το μήκος κύματος του φωτός.

35.7 Χρησιμοποιώντας το πείραμα συμβολής από δύο σχισμές για τη μέτρηση του μήκους κύματος του φωτός.

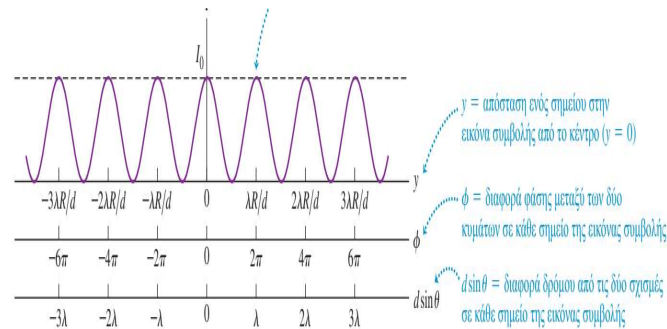


$$d=0.2 \cdot 10^{-3} \text{ m}, D= 1 \text{ m}, m=3, y_3=9.49 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$y_m = D m \lambda / d \text{ έχουμε max}$$

$$\lambda \sim 633 \text{ nm}$$

Θεωρία vs πείραμα

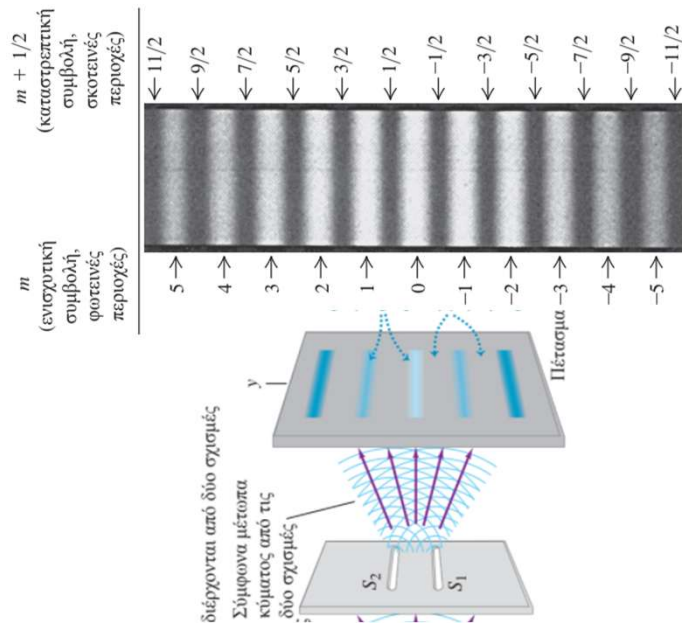


$$F(x) = \cos^2 x$$

$$I = I_0 \cos^2 \left(\frac{1}{2} k d \sin \theta \right) = I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta \right) \quad (\text{ένταση μακριά από τις δύο πηγές})$$

Συνάρτηση της έντασης

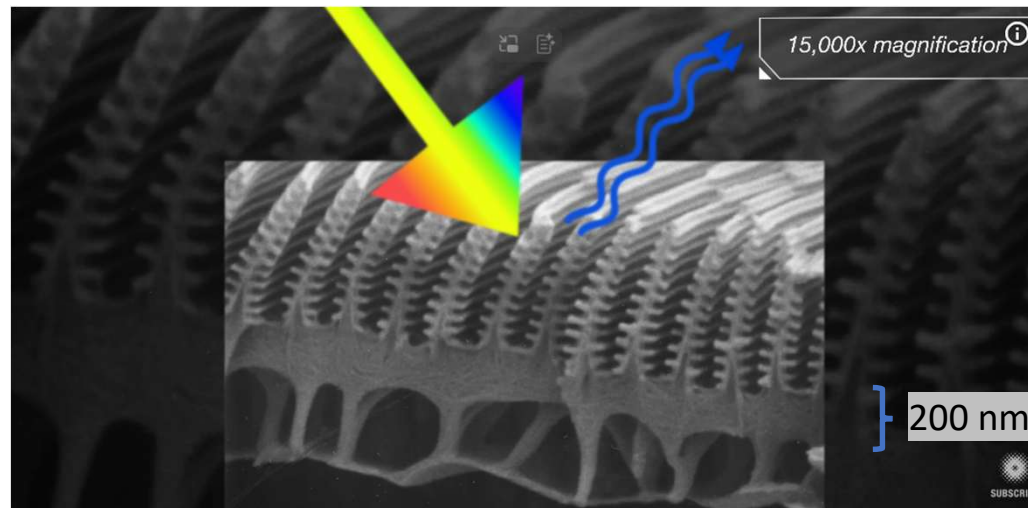
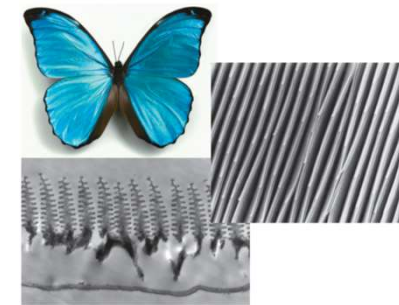
Εισαπέχοντα μέγιστα ίδιας έντασης



Εικόνα σε επίπεδο μακριά από τις δύο σχισμές

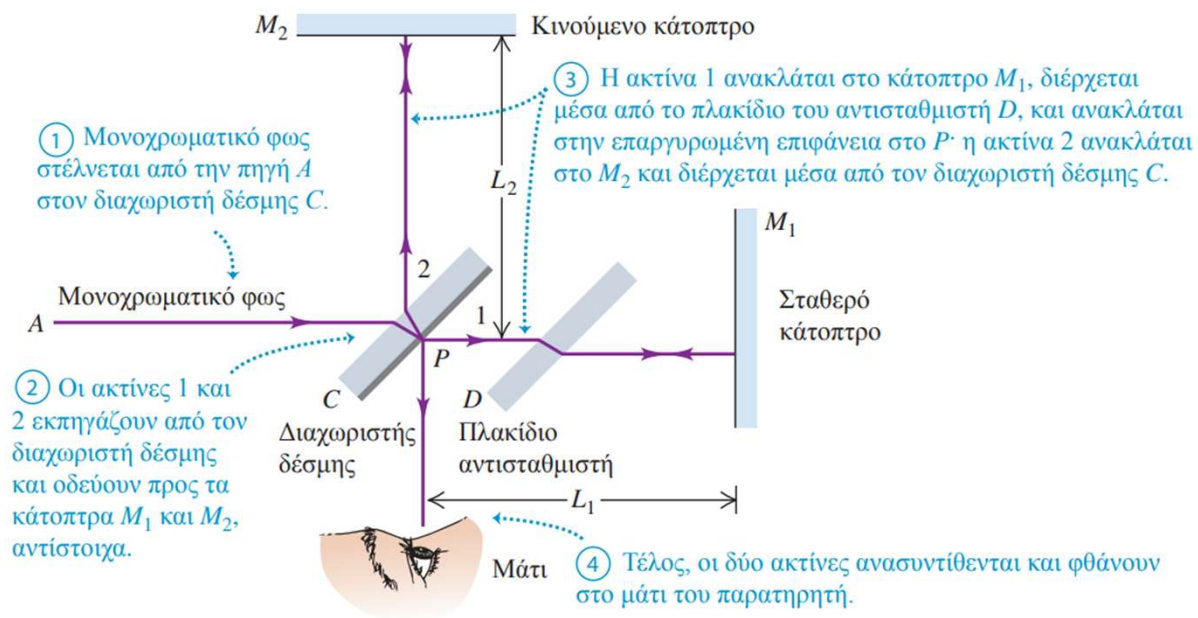
BIO Εφαρμογή Συμβολή στα Φτερά της Πεταλούδας Πολλά από τα πιο λαμπερά χρώματα στον ζωικό κόσμο δημιουργούνται από συμβολή και όχι από χρωστικές ουσίες. Αυτές οι φωτογραφίες δείχνουν την πεταλούδα *Morpho rhetenor* και τις μικροσκοπικές κλίμακες που καλύπτουν τις πάνω επιφάνειες των φτερών της. Οι κλίμακες φέρουν μια πληθώρα μικροσκοπικών κορυφογραμμών (μεσαία φωτογραφία)· αυτές φέρουν σχηματισμούς σε ίσες αποστάσεις μεταξύ τους (φωτογραφία κάτω) που λειτουργούν ως ανακλαστήρες. Αυτοί είναι τοποθετημένοι έτσι ώστε οι ανακλάσεις να συμβάλλουν ενισχυτικά για το γαλάζιο φως. Η πολυστρωματική δομή ανακλά το 70 % του γαλάζιου φωτός που προσπίπτει σε αυτήν, δίνοντας στα φτερά μια κατοπτρική λάμψη. (Οι κάτω πλευρές των φτερών δεν έχουν αυτές τις δομές και έχουν χρώμα θαμπό καφέ.)

Structural Colour! (at the nanoscale)

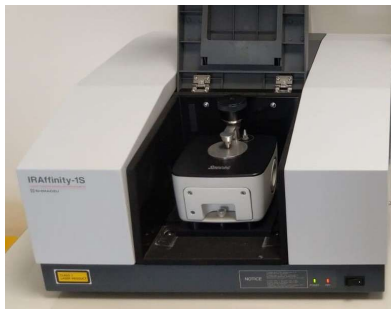


ΤΟ ΣΥΜΒΟΛΟΜΕΤΡΟ MICHELSON

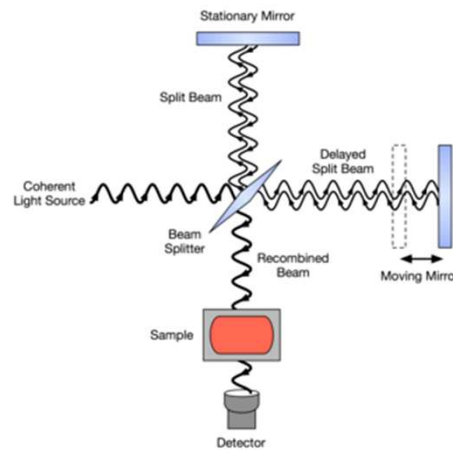
35.19 Σχεδιάγραμμα του συμβολόμετρου Michelson. Ο παρατηρητής βλέπει μία εικόνα συμβολής που προκύπτει από τη διαφορά δρόμων των ακτίνων 1 και 2.



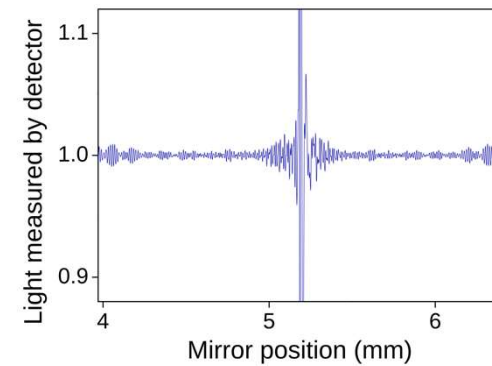
ΤΟ ΣΥΜΒΟΛΟΜΕΤΡΟ MICHELSON – εφαρμογή στη φασματοσκοπία απορρόφησης υπέρυθρου FTIR (Fourier transform infrared spectroscopy)



Τυπική διάταξη FTIR

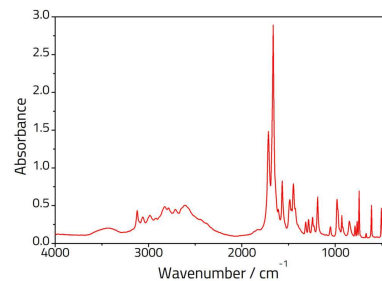


Η καρδιά του FTIR είναι το συμβολόμετρο



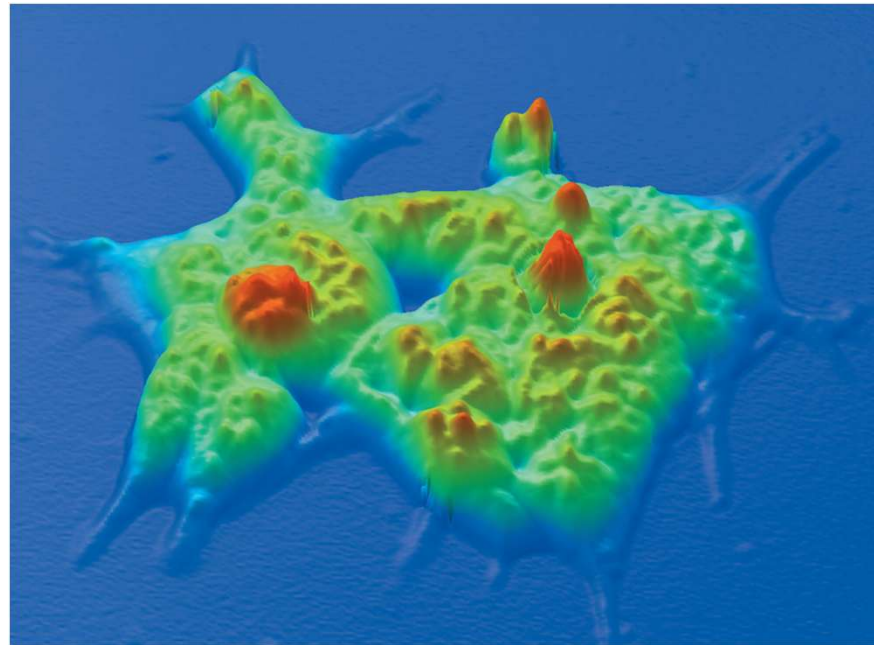
Ο ανιχνευτής καταγράφει την ένταση της υπέρυθρης ακτινοβολίας σε συνάρτηση με τη θέση του κινούμενου καθρέπτη → συμβολογράφημα

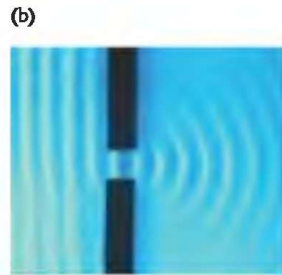
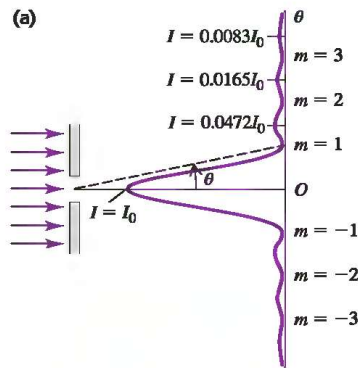
Μαθηματική επεξεργασία (μετασχηματισμός Fourier) εφαρμόζεται στη συνάρτηση του συμβολογραφήματος και προκύπτει η ένταση συναρτήσει του κυματάριθμου $k=1/\lambda$ (σε cm^{-1})



ΤΟ ΣΥΜΒΟΛΟΜΕΤΡΟ MICHELSON – άλλες εφαρμογές

BIO Εφαρμογή Απεικόνιση Κυττάρων με Ένα Συμβολόμετρο Michelson Αυτή η ψευδοέγχρωμη εικόνα ενός ανθρώπινου καρκινικού κυττάρου του παχέος εντέρου κατασκευάστηκε χρησιμοποιώντας ένα μικροσκόπιο που συνδυάστηκε με ένα συμβολόμετρο Michelson. Το κύτταρο βρίσκεται στον έναν βραχίονα του συμβολόμετρου και το φως που διέρχεται από το κύτταρο υφίσταται μετατόπιση φάσης που εξαρτάται από το πάχος του κυττάρου και τα οργάνιδia μέσα στο κύτταρο. Το πρότυπο των κροσσών μπορεί στη συνέχεια να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή μιας τρισδιάστατης απεικόνισης του κυττάρου. Οι επιστήμονες έχουν χρησιμοποιήσει αυτήν την τεχνική για να παρατηρήσουν πώς συμπεριφέρονται διαφορετικοί τύποι κυττάρων όταν μελετώνται από μικροσκοπικούς ανιχνευτές. Τα καρκινικά κύτταρα αποδεικνύονται «πιο μαλακά» από τα φυσιολογικά κύτταρα, μια διάκριση που μπορεί να κάνει τα καρκινικά βλαστοκύτταρα πιο εύκολο να ταυτοποιηθούν.





ΠΕΡΙΘΛΑΣΗ

Έχουν χρησιμοποιηθεί στοιχεία από διαφάνειες μαθήματος του καθ. Δ. Χριστόφилου (Α.Π.Θ.)

•Όταν το εύρος της σχισμής (b) είναι της ίδιας τάξης μεγέθους ή μικρότερο από το μήκος κύματος (λ):

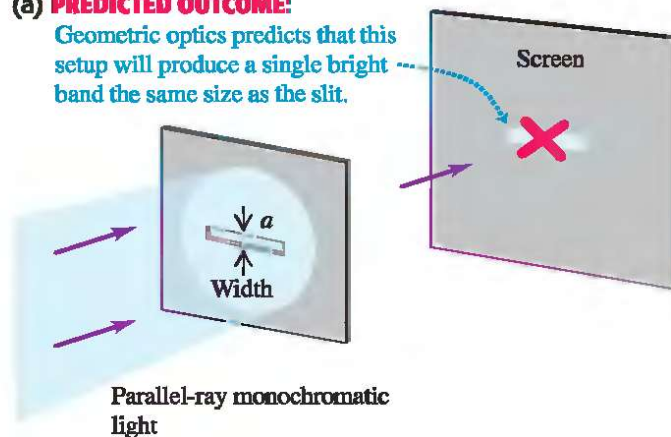
Η περίθλαση είναι πολύ έντονη, το κύμα απλώνεται σημαντικά μετά τη σχισμή και το παρατηρούμενο πρότυπο περίθλασης είναι ευρύ.

•Όταν το εύρος της σχισμής $b \gg \lambda$:

Η περίθλαση παρατηρείται, αλλά η γωνία εκτροπής είναι πολύ μικρή και το φως συνεχίζει να διαδίδεται σχεδόν ευθύγραμμα, σύμφωνα με τη γεωμετρική οπτική. Σε αυτή την περίπτωση, τα φαινόμενα περίθλασης είναι δυσδιάκριτα ή αμελητέα.

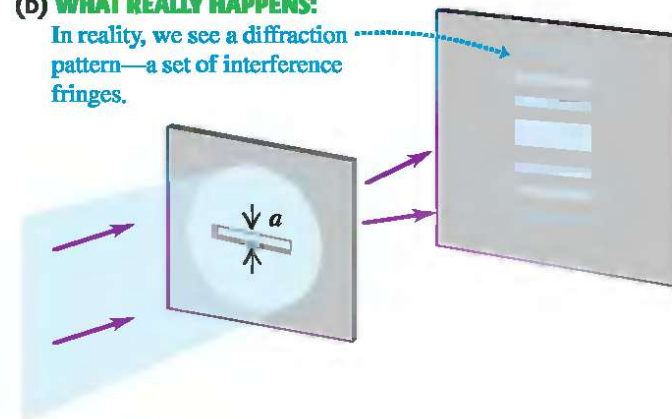
(a) PREDICTED OUTCOME:

Geometric optics predicts that this setup will produce a single bright band the same size as the slit.



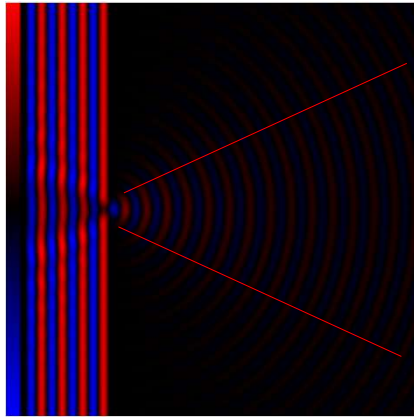
(b) WHAT REALLY HAPPENS:

In reality, we see a diffraction pattern—a set of interference fringes.

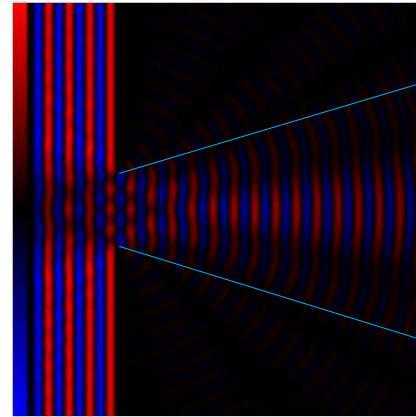


Μοντελοποίηση περίθλασης κυμάτων νερού από πέτασμα με άνοιγμα διαστάσεων συγκρίσιμων με το μήκος κύματος

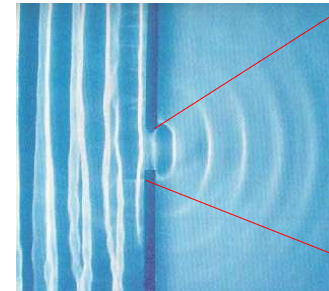
Εύρος σχισμής = μήκος κύματος



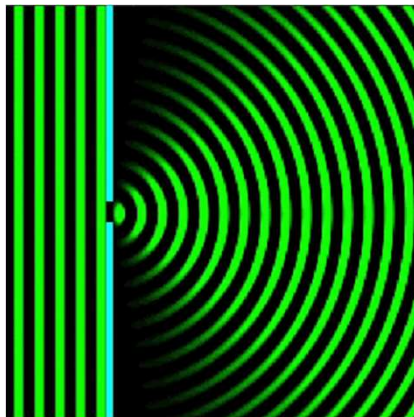
Εύρος σχισμής = 4 x μήκος κύματος



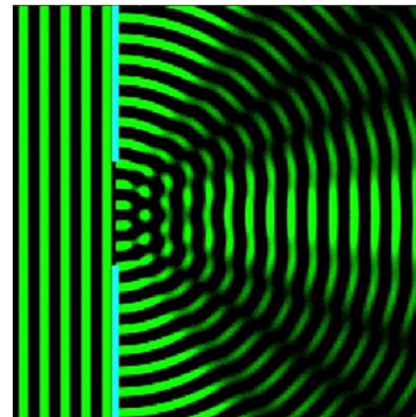
Εύρος σχισμής = μήκος κύματος



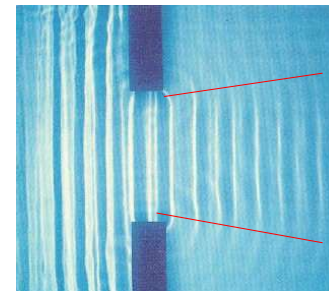
Εύρος σχισμής = μήκος κύματος



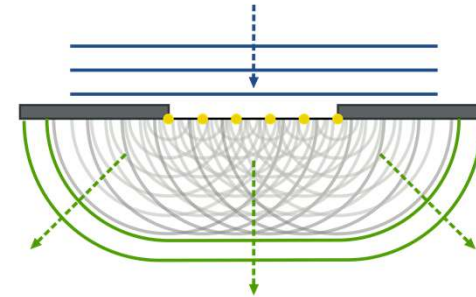
Εύρος σχισμής = 6 x μήκος κύματος



Εύρος σχισμής >> μήκος κύματος



Αρχή του Huygens: κάθε σημείο ενός μετώπου κύματος μπορεί να θεωρηθεί ως πηγή δευτερογενών κυματίων. Για την περίπτωση της σχισμής: κάθε στοιχειώδης επιφάνεια του ανοίγματος της σχισμής μπορεί να θεωρηθεί ως πηγή δευτερογενών κυμάτων.



Αυτά εξαπλώνονται προς όλες τις διευθύνσεις με ταχύτητα ίση με την ταχύτητα διάδοσης του κύματος. **Η θέση του μετώπου κύματος για κάθε μεταγενέστερη χρονική στιγμή είναι η περιβάλλουσα των δευτερογενών κυματίων εκείνη τη χρονική στιγμή.**

Για την εύρεση της συνολικής μετατόπισης σε οποιοδήποτε σημείο χρησιμοποιούμε την **αρχή της επαλληλίας** για να συνθέσουμε όλες τις μεμονωμένες μετατοπίσεις που παράγονται από αυτά τα δευτερογενή κυμάτια.

ΠΕΡΙΘΛΑΣΗ

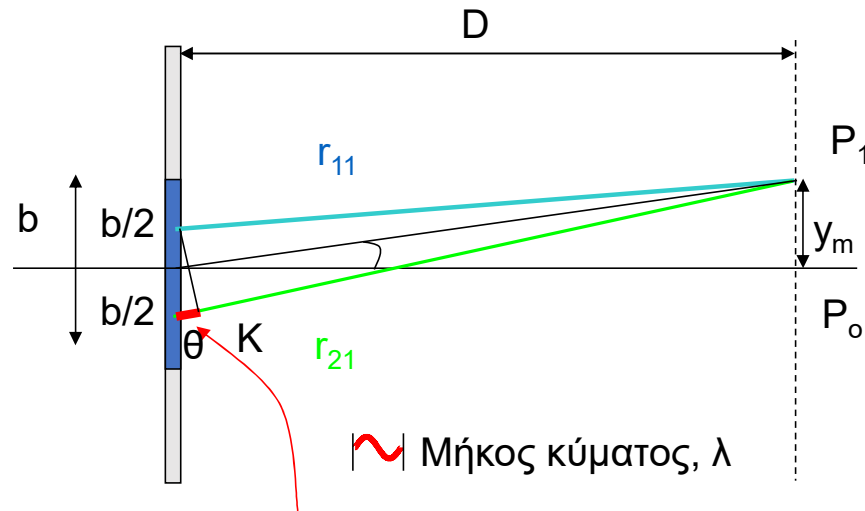
Το πρόβλημα περιγραφής της περίθλασης επιλύεται σε δύο διαφορετικές περιπτώσεις:

→ τόσο η σημειακή πηγή όσο και το πέτασμα βρίσκονται σχετικά κοντά στο εμπόδιο που σχηματίζει την εικόνα περίθλασης. Η περίπτωση αυτή αναφέρεται ως **περίθλαση κοντινού πεδίου** ή **περίθλαση Fresnel** (από το όνομα του Γάλλου επιστήμονα Augustin Jean Fresnel - Αγκουστέν Ζαν Φρενέλ, 1788-1827)

→ η πηγή, το εμπόδιο και το πέτασμα είναι αρκετά απομακρυσμένα μεταξύ τους, έτσι ώστε να μπορούμε να θεωρήσουμε ότι όλες οι ευθείες γραμμές από την πηγή προς το εμπόδιο είναι παράλληλες, καθώς επίσης και ότι όλες οι ευθείες γραμμές από το εμπόδιο προς κάθε συγκεκριμένο σημείο του πετάσματος είναι παράλληλες. Πρόκειται για την περίθλαση **περίθλαση Fraunhofer** (από το όνομα του Γερμανού Φυσικού Joseph von Fraunhofer - Γιόζεφ φον Φραουνχόφερ, 1787-1826) ή **περίθλαση μακρινού πεδίου**.

τόσο η συμβολή όσο και η περίθλαση είναι συνέπειες της επαλληλίας και της αρχής του Huygens

ΠΕΡΙΘΛΑΣΗ



Διαφορά οπτικού δρόμου $\Delta r = b/2 \sin\theta$

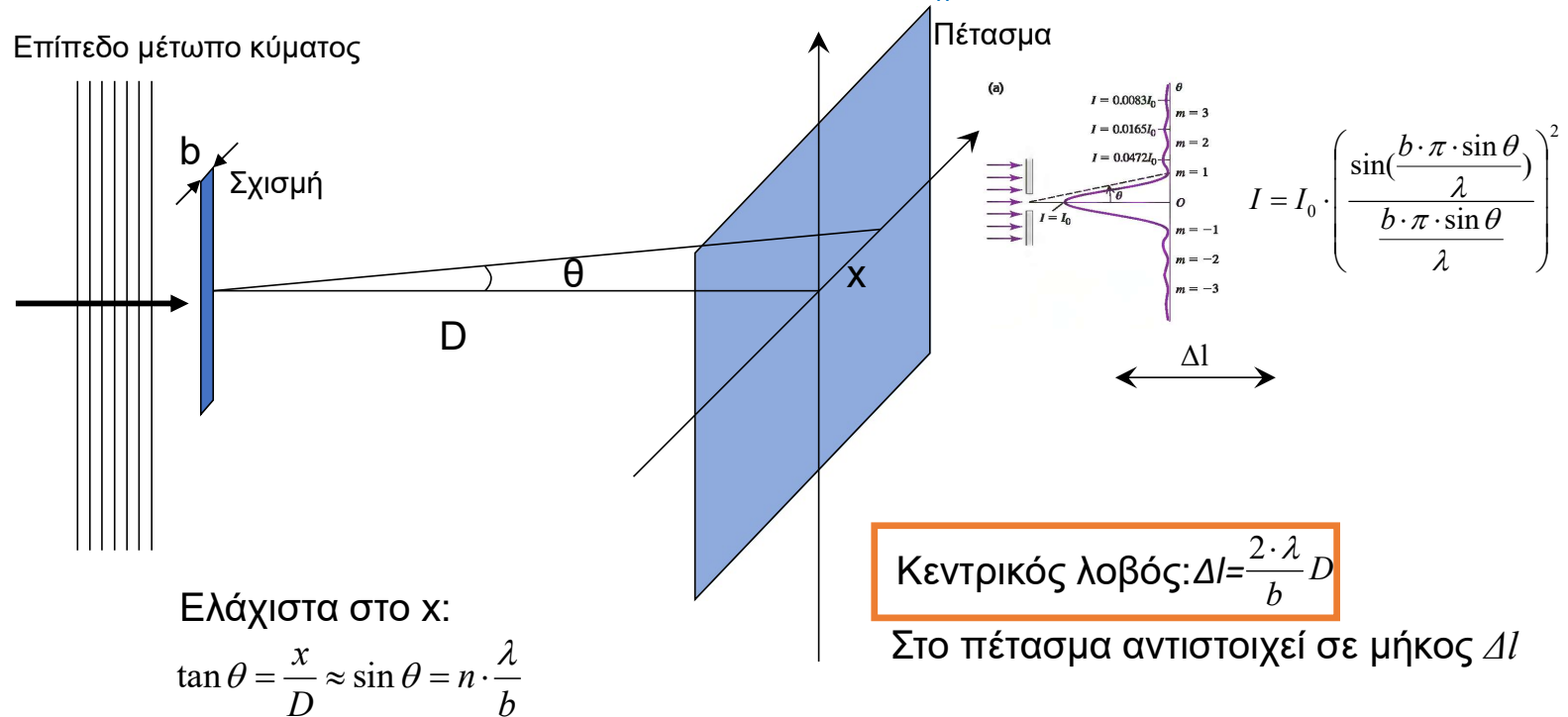
Σκοτεινοί κροσσοί όταν $\Delta r = b/2 \sin\theta = \lambda/2 \rightarrow \sin\theta = m\lambda/b$ ($m=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$)

Σε κάθε θέση $y_m = D m\lambda/b$ έχουμε min

ΠΕΡΙΘΛΑΣΗ ΑΠΟ ΜΙΑ ΣΧΙΣΜΗ

Εύρεση μήκους κύματος ή διάστασης σχισμής

Σκοτεινοί κροσσοί στα $x_n = D n \lambda / b$



Μήκος κύματος: $\lambda = \frac{\Delta l / 2}{D} \cdot b$

Διάσταση σχισμής: $b = \frac{D}{\Delta l / 2} \cdot \lambda$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 36.1

ΠΕΡΙΘΛΑΣΗ ΑΠΟ ΑΠΛΗ ΣΧΙΣΜΗ

Φως λέιζερ μήκους κύματος 633 nm διέρχεται από μια στενή σχισμή και παρατηρείτε την εικόνα περίθλασης σε ένα πέτασμα που βρίσκεται σε απόσταση $6,0 \text{ m}$. Η απόσταση μεταξύ των κέντρων των πρώτων ελαχίστων εκατέρωθεν του κεντρικού φωτεινού κροσσού είναι 32 mm (Σχ. 36.7). Ποιο είναι το εύρος της σχισμής;

$D \rightarrow x$

Το πρώτο ελάχιστο αντιστοιχεί σε $m = 1$ στην Εξ.

$$y_m = x m \lambda / b$$

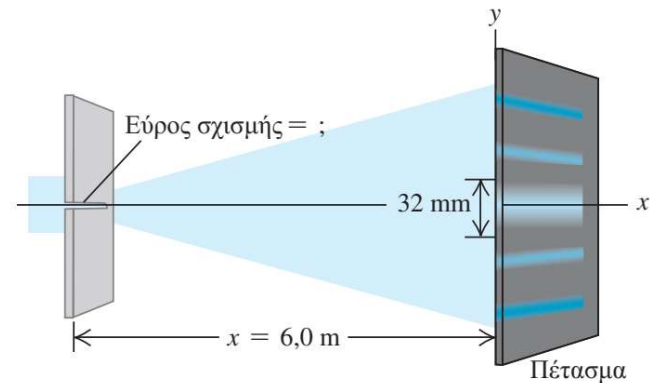
Με b το εύρος της σχισμής, λ το μήκος κύματος, m η τάξη του σκοτεινού κροσσού και x η απόσταση πετάσματος-σχισμής.

Η απόσταση y_1 από το μέσο του κεντρικού μεγίστου μέχρι το πρώτο ελάχιστο και στις δύο πλευρές είναι ίση με τη μισή απόσταση μεταξύ αυτών των δύο πρώτων ελαχίστων, οπότε

$$y_1 = (32 \text{ mm})/2 = 16 \text{ mm}.$$

$$b = \frac{x \lambda}{y_1} = \frac{(6,0 \text{ m})(633 \times 10^{-9} \text{ m})}{16 \times 10^{-3} \text{ m}} = 2,4 \times 10^{-4} \text{ m} = 0,24 \text{ mm}$$

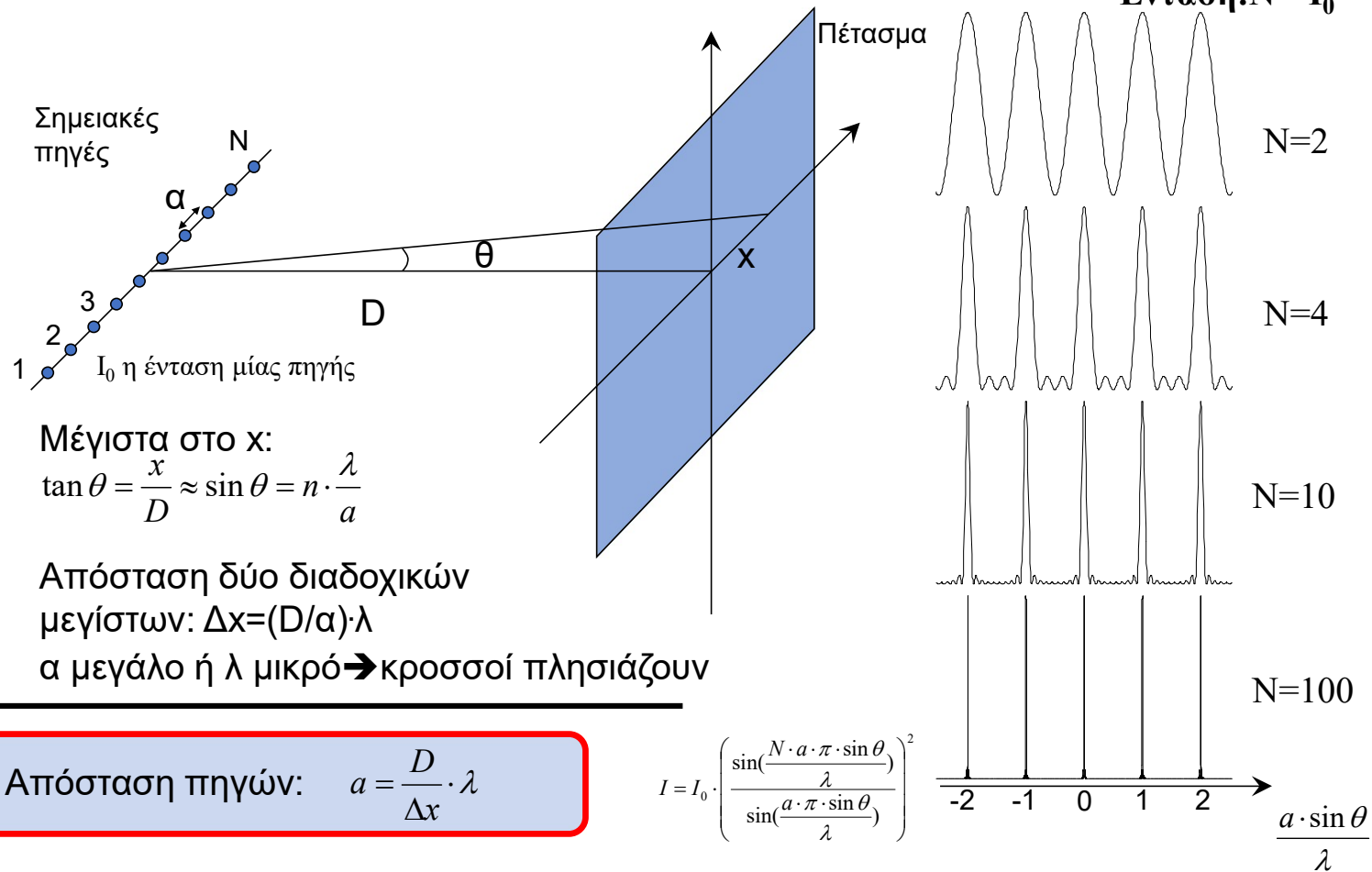
36.7 Πείραμα περίθλασης από απλή σχισμή.



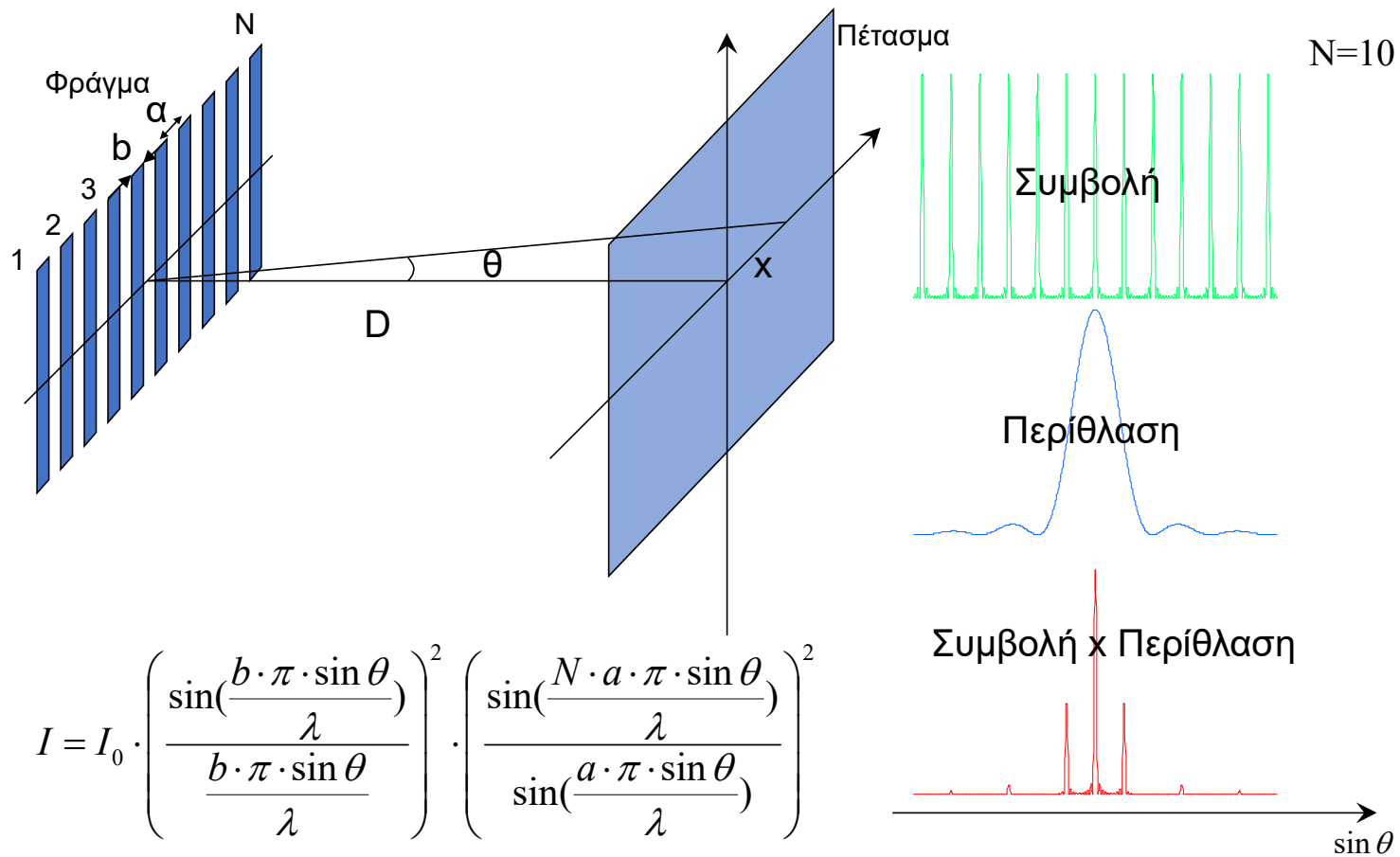
Ή από την προηγούμενη διαφάνεια με Δl το εύρος του κεντρικού κροσσού

$$b = \frac{D}{\Delta l / 2} \cdot \lambda$$

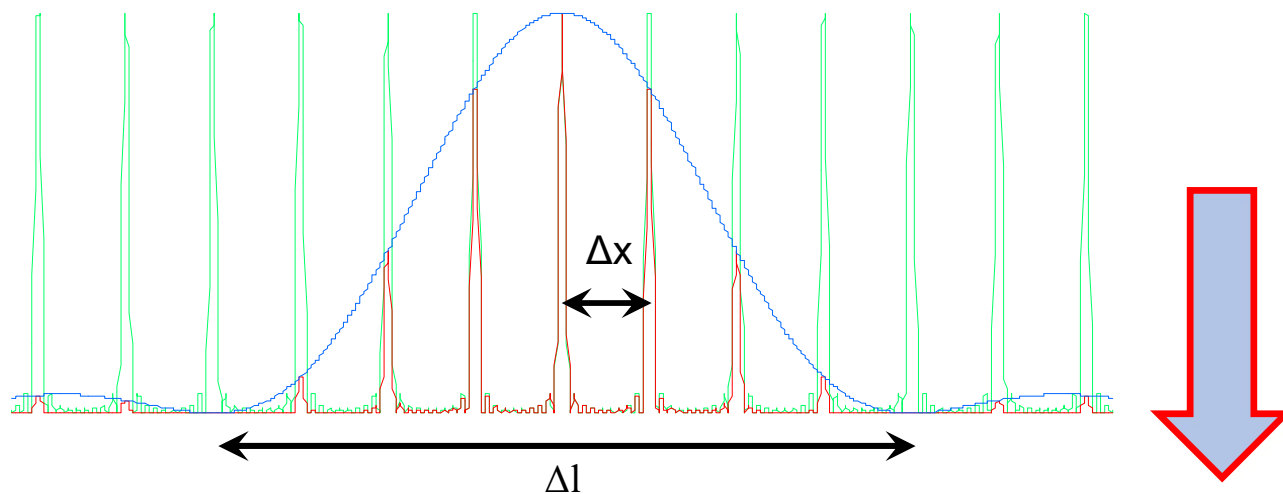
ΣΥΜΒΟΛΗ ΠΟΛΛΩΝ ΣΗΜΕΙΑΚΩΝ ΣΥΓΧΡΟΝΩΝ ΠΗΓΩΝ Εύρεση απόστασης πηγών



ΣΥΜΒΟΛΗ ΠΟΛΛΩΝ ΣΧΙΣΜΩΝ-ΦΡΑΓΜΑ ΠΕΡΙΘΛΑΣΗΣ
Εύρεση απόστασης και διάστασης των σχισμών



ΣΥΜΒΟΛΗ ΠΟΛΛΩΝ ΣΧΙΣΜΩΝ



Διάσταση σχισμής: $b = \frac{D}{\Delta l / 2} \cdot \lambda$

Απόσταση σχισμών: $a = \frac{D}{\Delta x} \cdot \lambda$

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ: Ισχύει για μικρές γωνίες όπου $\tan\theta \sim \sin\theta$

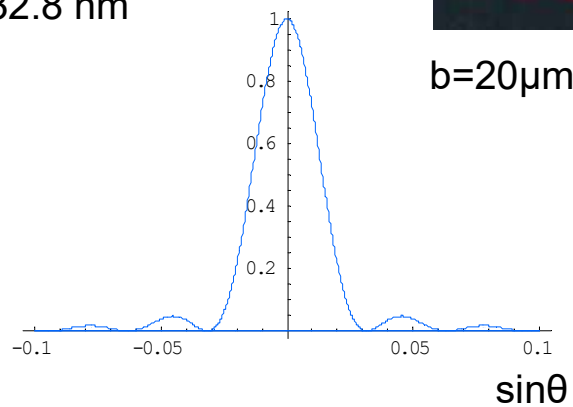
ΠΕΡΙΘΛΑΣΗ ΑΠΟ ΜΙΑ ΣΧΙΣΜΗ

ΕΞΑΡΤΗΣΗ ΑΠΟ ΤΟ ΜΕΓΕΘΟΣ b

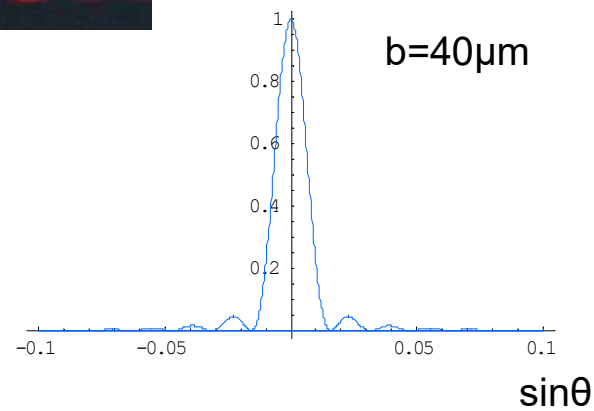
$\lambda = 632.8 \text{ nm}$



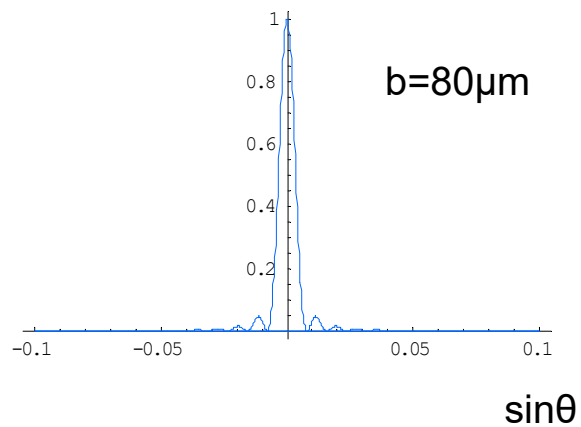
$b = 20 \mu\text{m}$



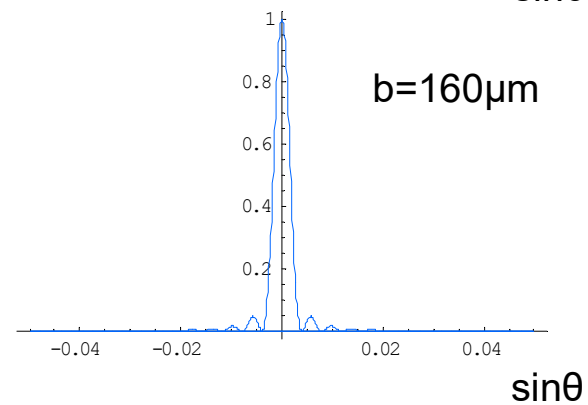
$b = 40 \mu\text{m}$



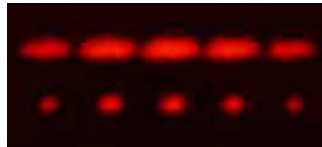
$b = 80 \mu\text{m}$



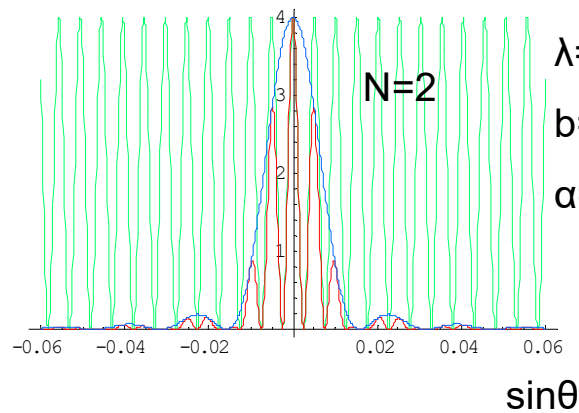
$b = 160 \mu\text{m}$



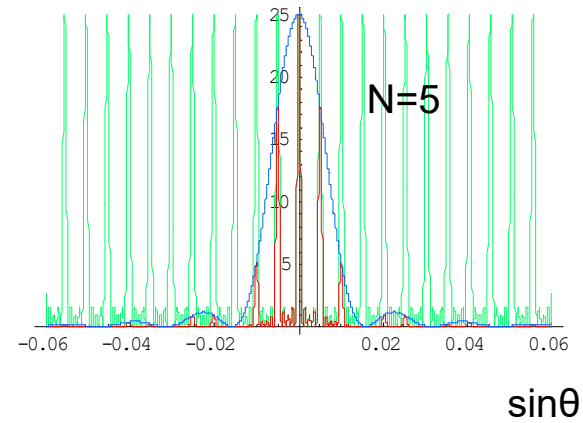
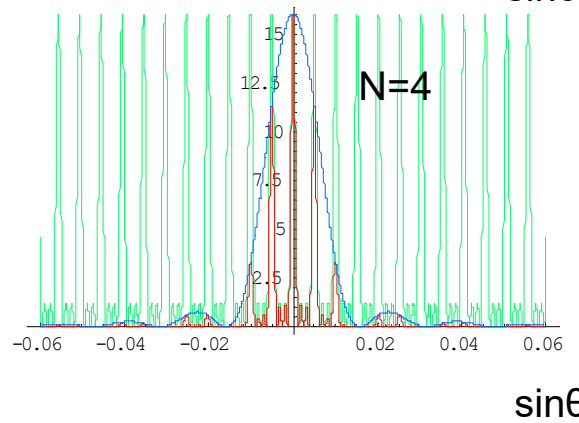
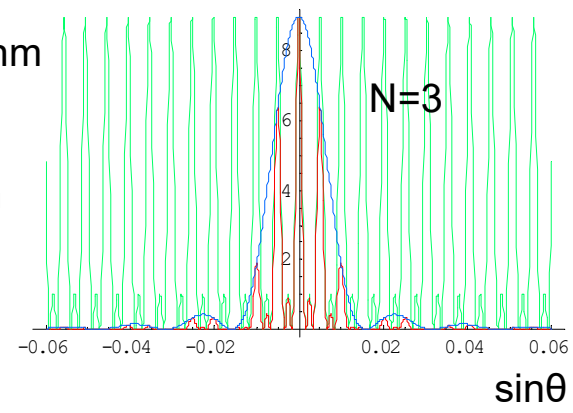
ΠΕΡΙΘΛΑΣΗ ΑΠΟ ΠΟΛΛΕΣ ΣΧΙΣΜΕΣ ΕΞΑΡΤΗΣΗ ΑΠΟ ΤΟ ΠΛΗΘΟΣ ΤΩΝ ΣΧΙΣΜΩΝ



2-slit and 5-slit diffraction of red laser light

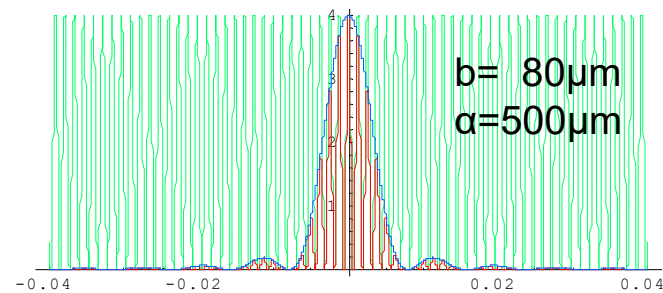
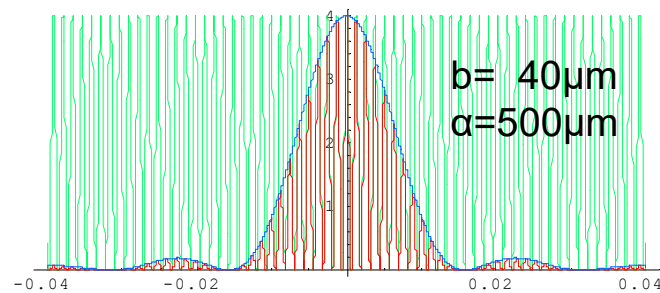
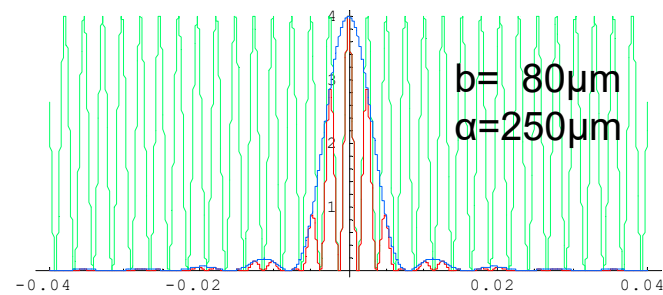
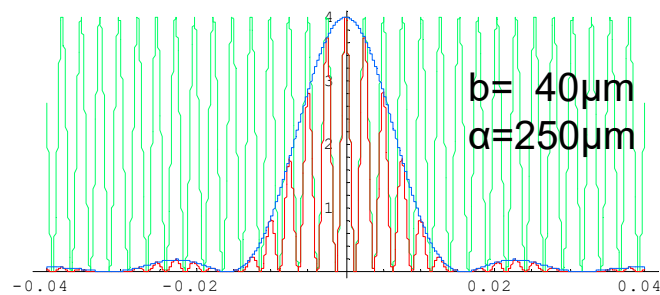
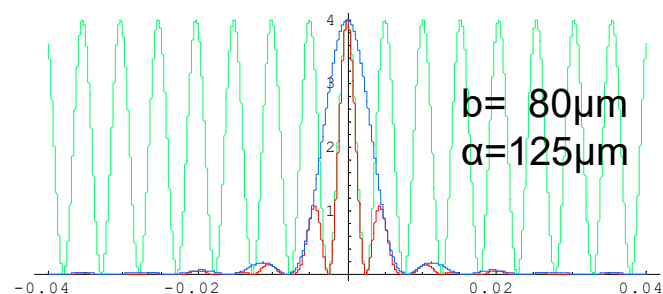
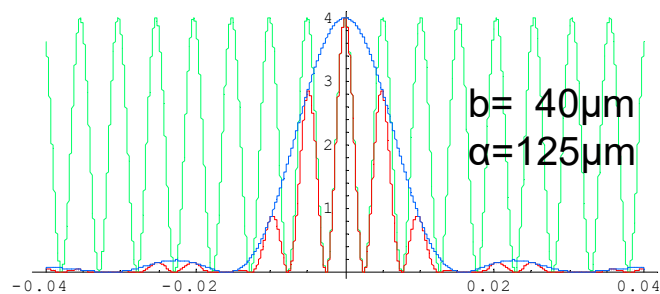


$\lambda=632.8 \text{ nm}$
 $b=40\mu\text{m}$
 $\alpha=125\mu\text{m}$



ΠΕΡΙΘΛΑΣΗ ΑΠΟ 2 ΣΧΙΣΜΕΣ

ΕΞΑΡΤΗΣΗ ΑΠΟ ΤΟ ΜΕΓΕΘΟΣ (b) ΚΑΙ ΤΗΝ ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΤΩΝ ΣΧΙΣΜΩΝ (α)

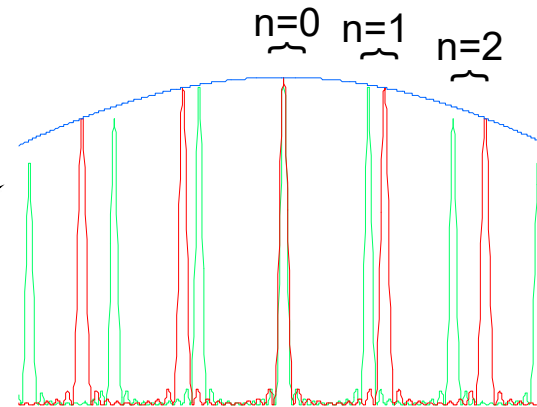
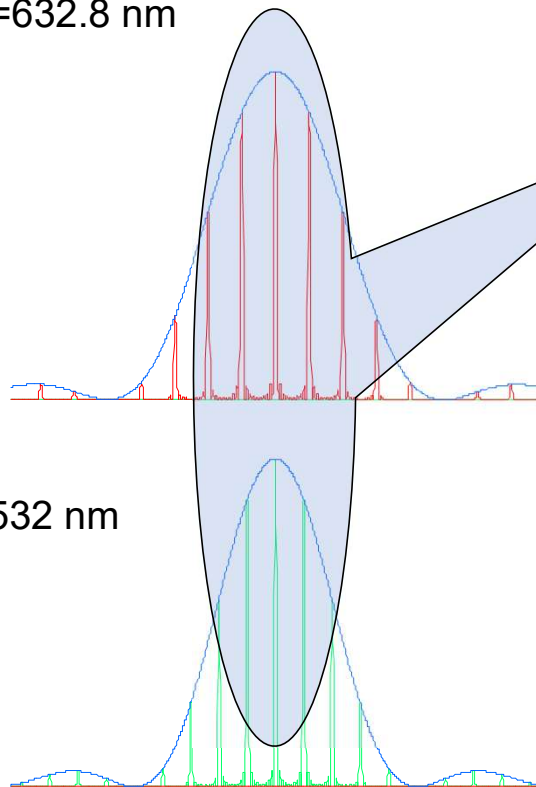


ΣΥΜΒΟΛΗ ΑΠΟ ΠΟΛΛΕΣ ΣΧΙΣΜΕΣ
ΕΞΑΡΤΗΣΗ ΑΠΟ ΤΟ ΜΗΚΟΣ ΚΥΜΑΤΟΣ λ

$$\Delta x = (D/\alpha)\lambda$$

$\lambda = 632.8 \text{ nm}$

$\lambda = 532 \text{ nm}$



$$\frac{\lambda_{\text{κόκκινο}}}{\lambda_{\text{πράσινο}}} = 1.19$$

Τάξη φάσματος:

- $n=0$ Όλα τα χρώματα μαζί.
- $|n|>0$ Τα χρώματα διαχωρίζονται.
- $n=2>1$ Η απόσταση μεταξύ των χρωμάτων μεγαλώνει.
Η έντασή τους όμως μικραίνει.

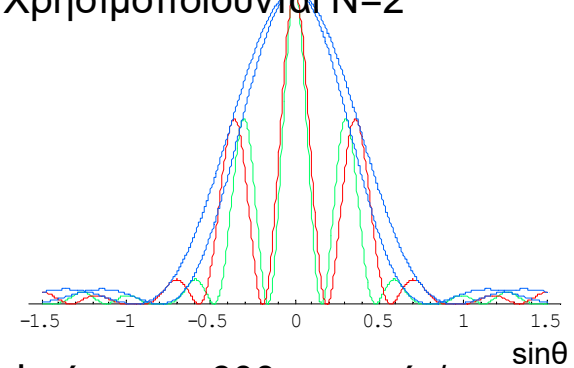
ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΠΕΡΙΘΛΑΣΗΣ

Μπορώ να αναλύσω το φως:

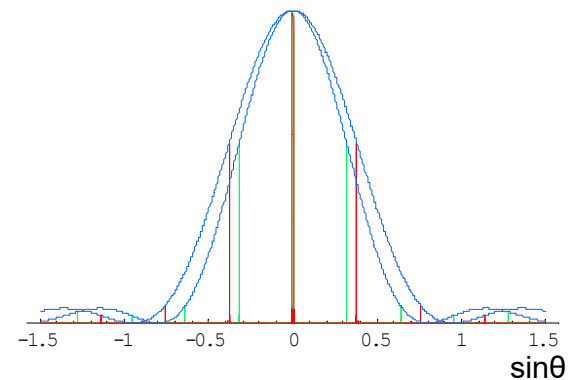
Καλύτερη ανάλυση όσο πιο:

- Μεγάλο αριθμό σχισμών-πηγών
Στενεύει το εύρος των κροσσών συμβολής
- Μικρή διάσταση σχισμών-πηγών
Διευρύνεται ο κεντρικός λοβός περίθλασης
Υψηλή ένταση των περιεχόμενων κροσσών συμβολής
- Μικρή απόσταση μεταξύ των σχισμών-πηγών
Μεγαλώνει η απόσταση μεταξύ των κροσσών συμβολής.
Μεγαλώνει η απόσταση μεταξύ των κροσσών ίδια τάξης συμβολής αλλά διαφορετικού λ.
- Μεγαλύτερη τάξη φάσματος
Μεγαλώνει η απόσταση μεταξύ των κροσσών.
Πρέπει να μένω πάντα στον κεντρικό λοβό περίθλασης

Φράγμα με 600 γραμμές/mm
Χρησιμοποιούνται $N=2$

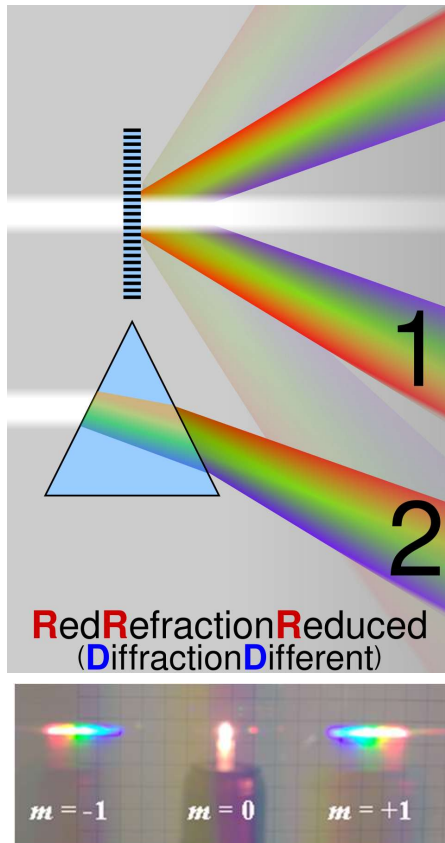


Φράγμα με 600 γραμμές/mm
Χρησιμοποιούνται $N=600$

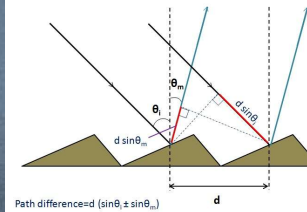
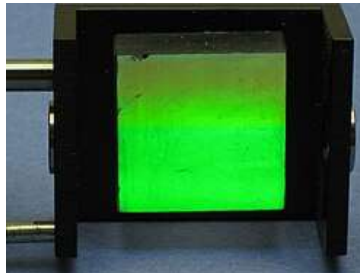


SPECTROSCOPY

(T/R) Diffraction (1) vs refraction (2)

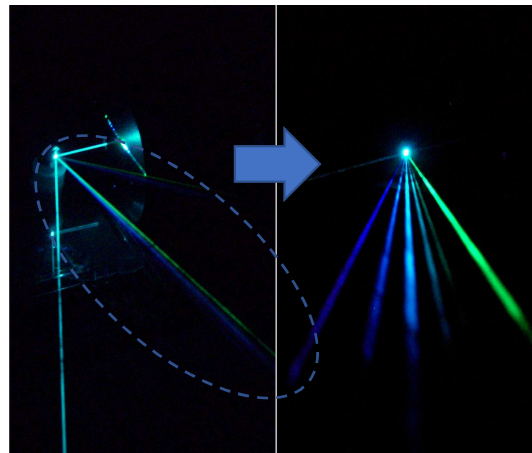


Gratings may work in Transmission or Reflection



Reflective grating

In the example, we look at the grating at such an angle so that only the green of the room's white light is diffracted



An argon laser beam consisting of multiple colors (wavelengths) strikes a silicon diffraction mirror grating and is separated into several beams, one for each wavelength. The wavelengths are (left to right)

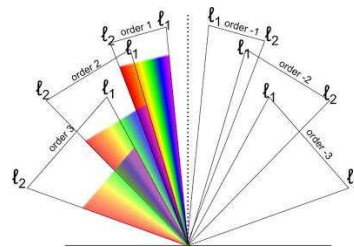
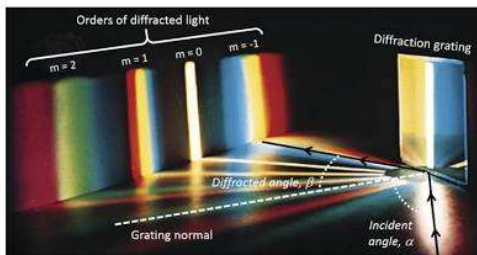
458 nm, 476 nm, 488 nm, 497 nm, 502 nm, and 515 nm.

All wavelengths

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 36.4

ΕΥΡΟΣ ΕΝΟΣ ΦΑΣΜΑΤΟΣ ΑΠΟ ΦΡΑΓΜΑ ΠΕΡΙΘΛΑΣΗΣ

Τα μήκη κύματος του ορατού φάσματος εκτείνονται κατά προσέγγιση από 380 nm (ιώδες) έως 750 nm (ερυθρό). (a) Βρείτε το γωνιακό εύρος του ορατού φάσματος πρώτης τάξης που σχηματίζεται από ένα επίπεδο φράγμα περίθλασης με 600 γραμμές ανά χιλιοστό, όταν λευκό φως προσπίπτει κάθετα στο φράγμα. (b) Αλληλεπικαλύπτονται τα φάσματα πρώτης και δεύτερης τάξης; Τι συμβαίνει με τα φάσματα δεύτερης και τρίτης τάξης;



Η απόσταση μεταξύ διαδοχικών χαραγών (σταθερά φράγματος) είναι

$$d = \frac{1}{600 \text{ σχισμές/mm}} = 1,67 \times 10^{-6} \text{ m}$$

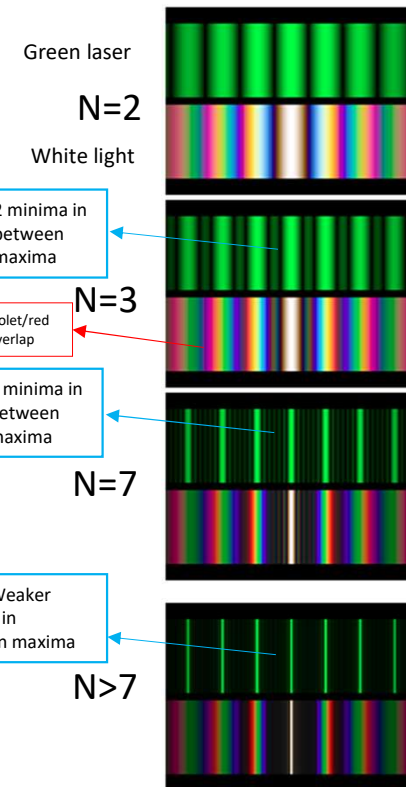
Απόσταση μεταξύ των σχισμών: $d \sin \theta = m \lambda$ (36.13)
 Μήκος κύματος: $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$
 Μέγιστα έντασης, πολλαπλές σχισμές: $d \sin \theta = m \lambda$
 Γωνία που σχηματίζει ο m-στός φωτεινός κροσσός στο πέτασμα με την κάθετο στην παράταξη των σχισμών.

$$\theta_{v1} = \arcsin\left(\frac{380 \times 10^{-9} \text{ m}}{1,67 \times 10^{-6} \text{ m}}\right) = 13,2^\circ$$

$$\theta_{r1} = \arcsin\left(\frac{750 \times 10^{-9} \text{ m}}{1,67 \times 10^{-6} \text{ m}}\right) = 26,7^\circ$$

$$\theta = \arcsin \frac{m \lambda}{d}$$

m=1



Απόσταση μεταξύ των σχισμών
Μήκος κύματος
Μέγιστα έντασης, πολλαπλές σχισμές:
Γωνία που σχηματίζει ο m -στός φωτεινός κροσσός στο πέτασμα με την κάθετο στην παράταξη των σχισμών.

$$d \sin \theta = m \lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (36.13)$$

$$\theta = \arcsin \frac{m \lambda}{d}$$

m=2

$$\theta_{v2} = \arcsin \left(\frac{2(380 \times 10^{-9} \text{ m})}{1,67 \times 10^{-6} \text{ m}} \right) = 27,1^\circ$$

$$\theta_{r2} = \arcsin \left(\frac{2(750 \times 10^{-9} \text{ m})}{1,67 \times 10^{-6} \text{ m}} \right) = 63,9^\circ$$

m=3

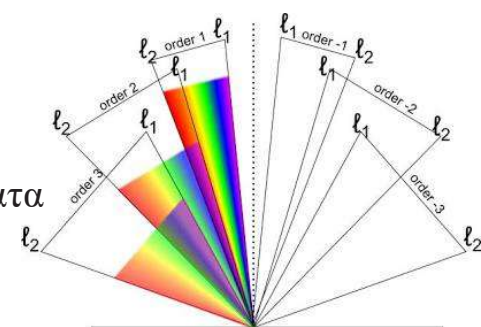
$$\theta_{v3} = \arcsin \left(\frac{3(380 \times 10^{-9} \text{ m})}{1,67 \times 10^{-6} \text{ m}} \right) = 43,0^\circ$$

$$\theta_{r3} = \arcsin \left(\frac{3(750 \times 10^{-9} \text{ m})}{1,67 \times 10^{-6} \text{ m}} \right) = \arcsin(1,35) = \text{απροσδιόριστη}$$

Συνεπώς, το φάσμα δεύτερης τάξης εκτείνεται από $27,1^\circ$ έως $63,9^\circ$ και το φάσμα τρίτης τάξης από $43,0^\circ$ έως 90° (η μέγιστη δυνατή τιμή της θ).

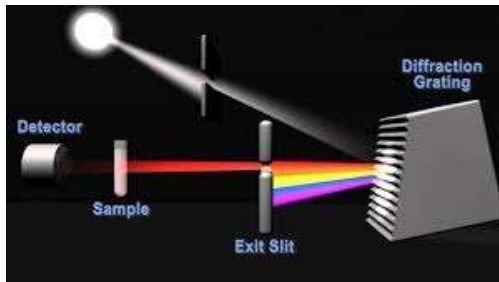
Άρα, το φάσμα πρώτης τάξης (από $13,2^\circ$ έως $26,7^\circ$) δεν αλληλεπικαλύπτεται με το φάσμα δεύτερης τάξης, αλλά τα φάσματα δεύτερης και τρίτης τάξης πράγματι αλληλεπικαλύπτονται.

Παράδειγμα με επικάλυψη
1ης-2ης και 2ης-3ης τάξης



Spectrophotometer

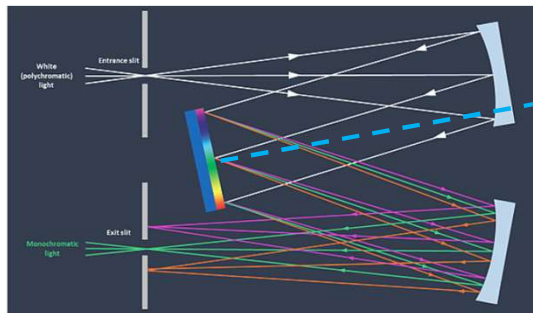
Basic idea



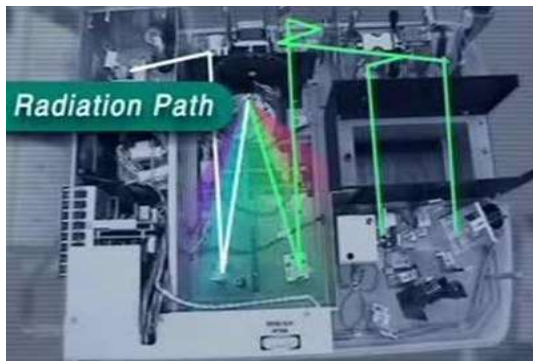
Target:

Spectra accumulation
i.e.
Light Intensity vs
wavelength

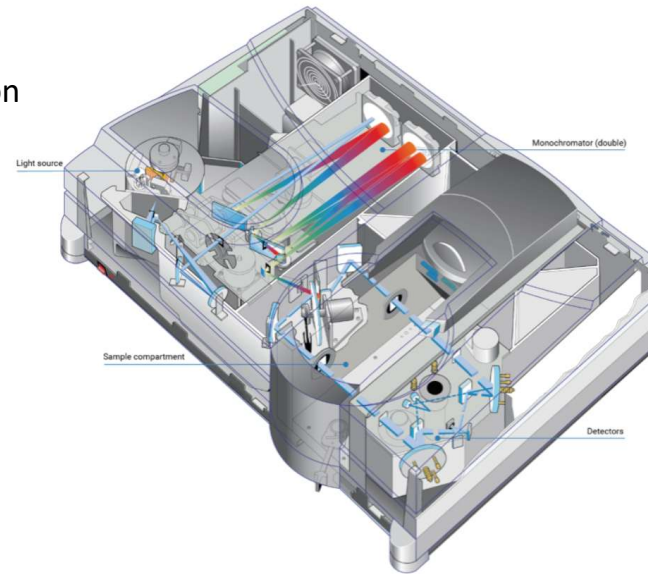
Typical monochromator design



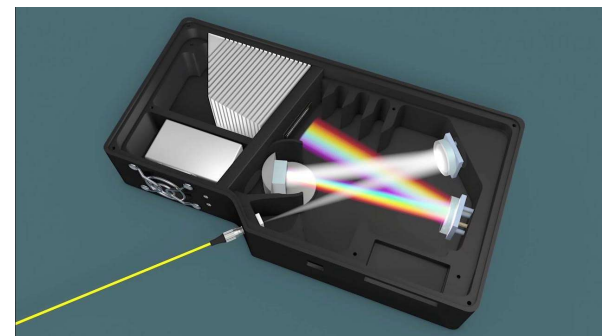
Rotating
grating

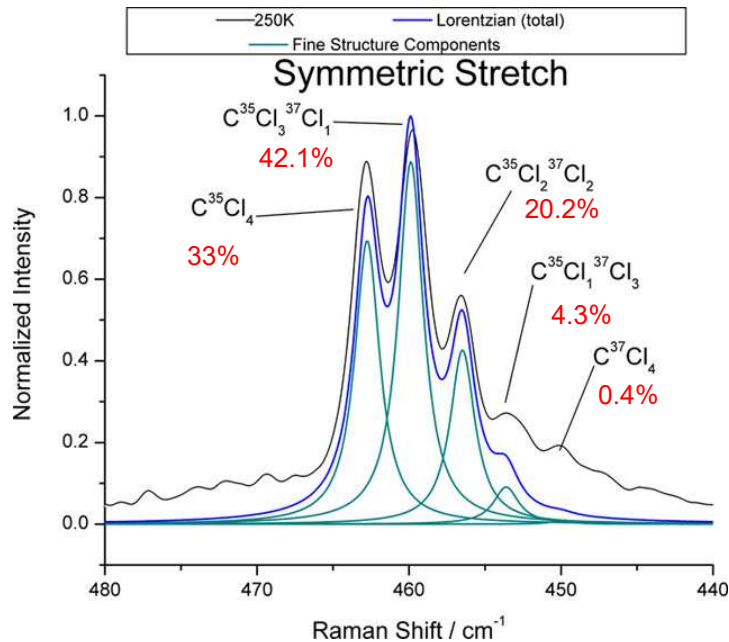


Double monochromator



Single monochromator coupled to optical fiber





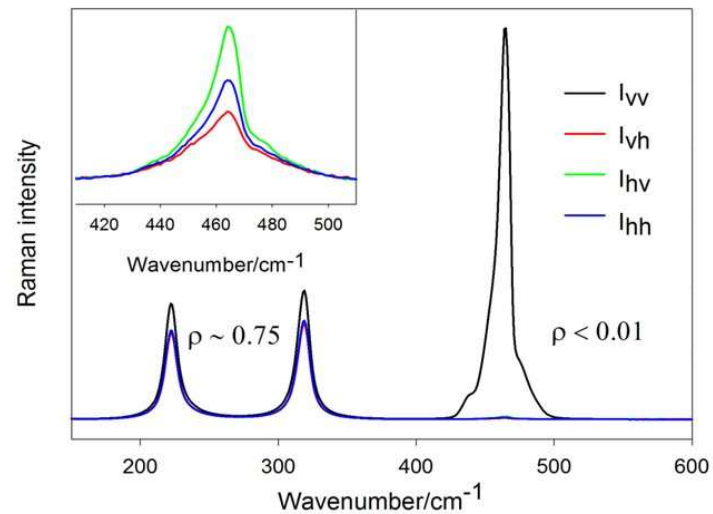
1800grooves/mm

Cl^{35} : ~76%

Cl^{37} : ~24%

Δονητικό φάσμα υψηλής ανάλυσης CCl_4

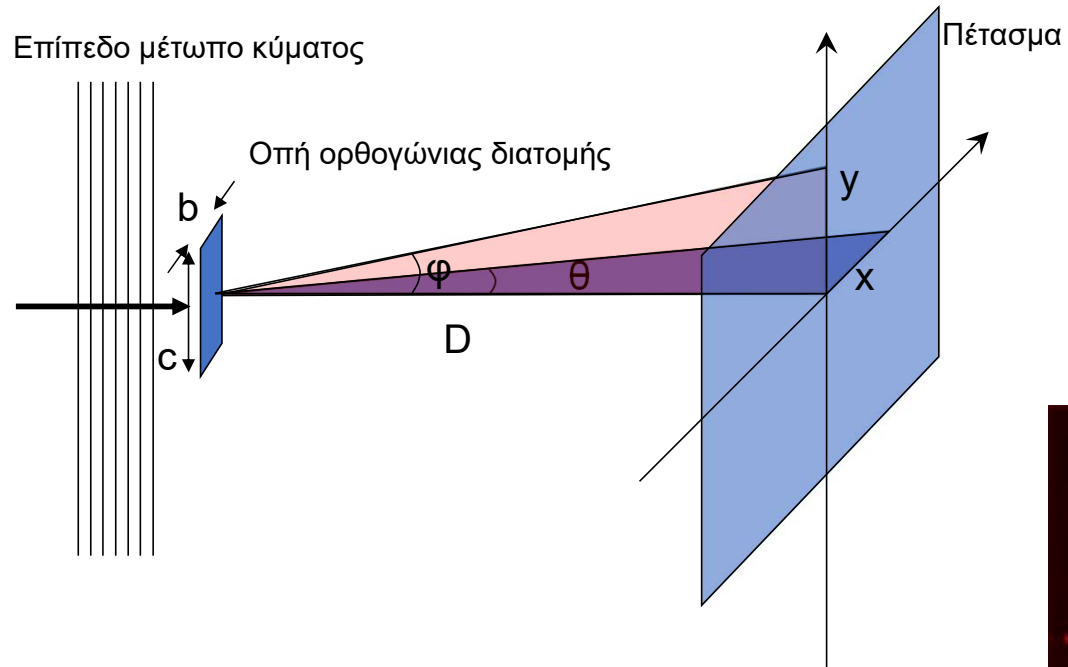
545.4275 nm
 545.3421 nm
 545.241 nm
 545.1557 nm
 ~1 cm^{-1} resolution



600grooves/mm

Αντίστοιχο φάσμα χαμηλής ανάλυσης (ο άξονας-x είναι ανάποδα σε σχέση με τον αντίστοιχο του διπλανού σχήματος)

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΜΕΓΑΛΗΣ ΔΙΑΣΤΑΣΗΣ ΤΗΣ ΣΧΙΣΜΗΣ

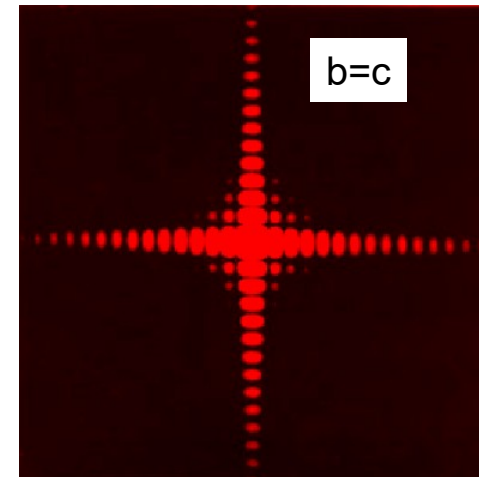


Ελάχιστα στο x :

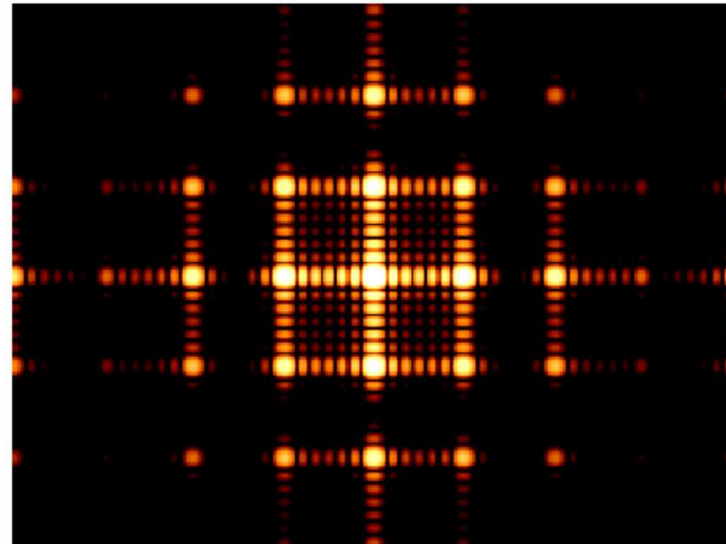
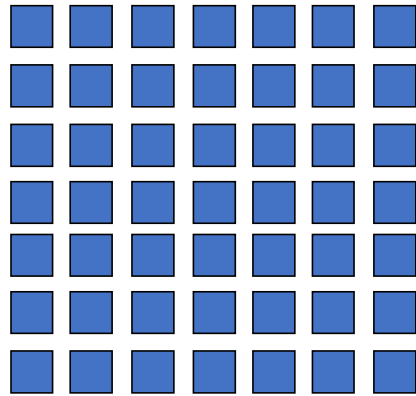
$$\tan \theta = \frac{x}{D} \approx \sin \theta = n \cdot \frac{\lambda}{b}$$

Ελάχιστα στο y :

$$\tan \varphi = \frac{y}{D} \approx \sin \varphi = n \cdot \frac{\lambda}{c}$$



ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΠΟΛΛΩΝ ΟΠΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ



Τρισδιάστατα «Φράγματα» → Στερεά σώματα

Κατάλληλο μήκος κύματος για φαινόμενα περίθλασης-συμβολής στα στερεά;

ΑΚΤΙΝΕΣ Χ → Κρυσταλλογραφία

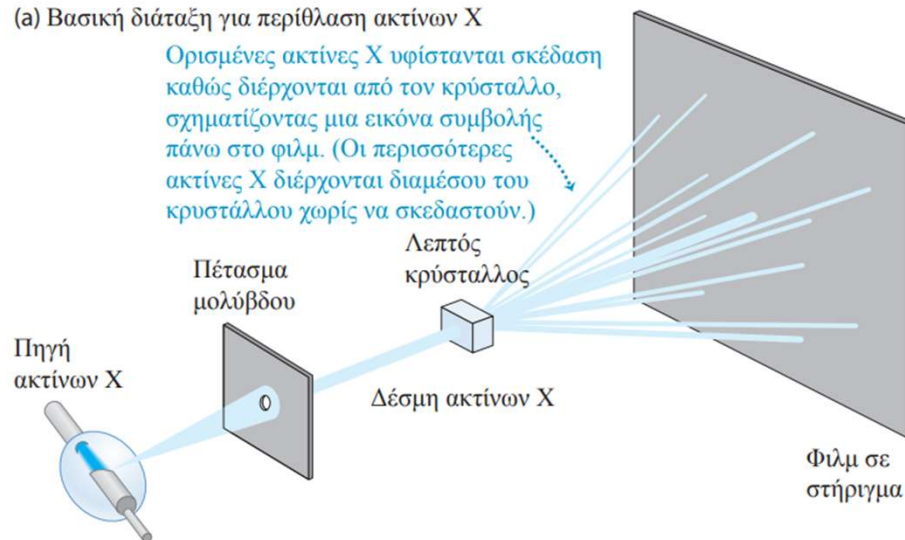
ΠΕΡΙΘΛΑΣΗ ΑΚΤΙΝΩΝ Χ

Τα πρώτα **πειράματα περίθλασης ακτίνων Χ** πραγματοποιήθηκαν το 1912 από τους Friederich (Φρίντριχ), Knipping (Κνίπινγκ) και φον Λάουε, χρησιμοποιώντας την πειραματική διάταξη που παρουσιάζεται στο Σχ. 36.20a.

ο Max von Laue (Μαξ φον Λάουε, 1879-1960) πρότεινε το 1912 ότι θα ήταν δυνατόν ένας κρύσταλλος να αποτελέσει ένα είδος τρισδιάστατου φράγματος περίθλασης των ακτίνων Χ.

36.20 (α) Ένα πείραμα περίθλασης ακτίνων Χ. (β) Εικόνα περίθλασης (ή εικόνα Laue) που σχηματίζεται από δέσμη ακτίνων Χ που προσπίπτει σε λεπτό δείγμα κρυσταλλικού χαλαζία.

(α) Βασική διάταξη για περίθλαση ακτίνων Χ



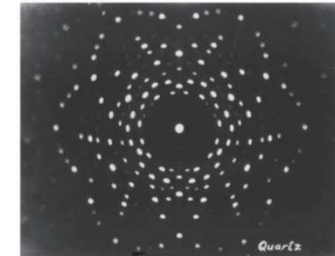
(β) Εικόνα περίθλασης Laue από ένα λεπτό δείγμα κρυσταλλικού χαλαζία.



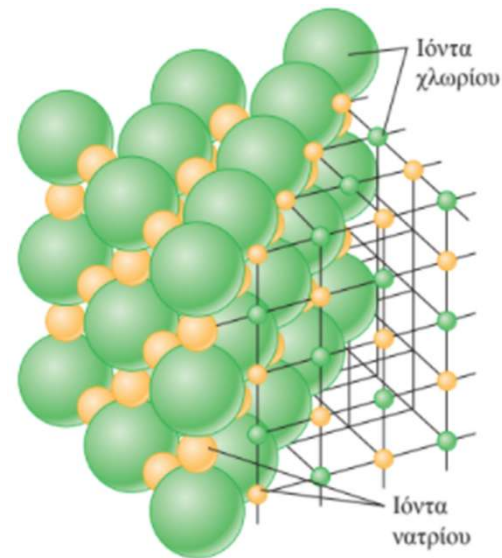
ΠΕΡΙΘΛΑΣΗ ΑΚΤΙΝΩΝ Χ

Οι σκεδαζόμενες ακτίνες Χ *πράγματι* σχημάτισαν μια εικόνα συμβολής, την οποία αποτύπωσαν σε ένα φωτογραφικό φιλμ. Το Σχ. 36.20b εμφανίζει τη φωτογραφία μιας τέτοιας εικόνας. Τα πειράματα αυτά επιβεβαίωσαν ότι οι ακτίνες Χ είναι κύματα, ή ότι τουλάχιστον έχουν κυματικές ιδιότητες, καθώς επίσης και ότι τα άτομα σε ένα κρύσταλλο είναι διευθετημένα σε μια κανονική διάταξη (Σχ. 36.21). Έκτοτε, έχει αποδειχθεί ότι η περίθλαση ακτίνων Χ αποτελεί ανεκτίμητο ερευνητικό εργαλείο τόσο για τη μέτρηση του μήκους κύματος των ακτίνων Χ όσο και για τη μελέτη της δομής των κρυστάλλων και περίπλοκων μορίων.

(b) Εικόνα περίθλασης Laue από ένα λεπτό δείγμα κρυσταλλικού χαλαζία.



36.21 Μοντέλο της διάταξης των ιόντων σε έναν κρύσταλλο NaCl (επιτραπέζιο αλάτι). Η απόσταση μεταξύ παρακείμενων ατόμων είναι 0,282 nm. (Στην πράξη, υπάρχει μια μικρή αλληλεπικάλυψη των ηλεκτρονιακών νεφών των ατόμων).

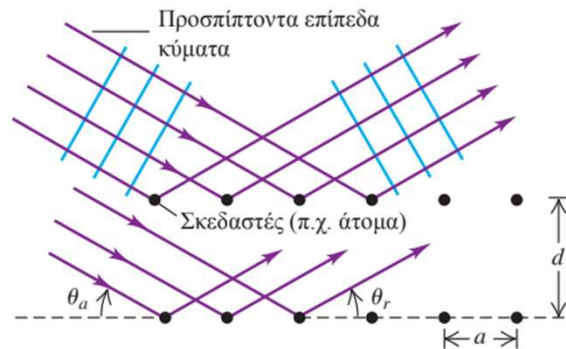


Ένα Απλό Μοντέλο της Περίθλασης Ακτίνων Χ

Για την καλύτερη κατανόηση της περίθλασης ακτίνων Χ, θεωρούμε κατ' αρχάς τη δισδιάστατη διάταξη σκέδασης του Σχ. 36.22α, όπου ένα επίπεδο κύμα προσπίπτει σε μια ορθογώνια συστοιχία (παράταξη) κέντρων σκέδασης.

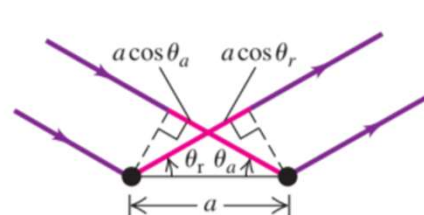
36.22 Δισδιάστατο μοντέλο σκέδασης από μια ορθογώνια συστοιχία (παράταξη). Η απόσταση μεταξύ διαδοχικών ατόμων σε μια οριζόντια γραμμή είναι a · η απόσταση μεταξύ διαδοχικών γραμμών είναι d . Οι γωνίες στο (b) μετρώνται από την επιφάνεια της συστοιχίας και όχι από την κάθετό της.

(a) Σκέδαση κυμάτων από ορθογώνια συστοιχία



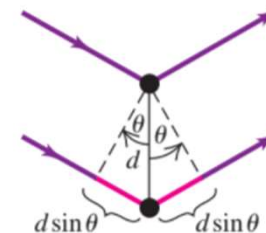
(b) Σκέδαση από διαδοχικά άτομα σε μια σειρά

Η συμβολή κυμάτων από διαδοχικά άτομα σε μια σειρά είναι ενισχυτική αν τα μήκη των δρόμων $a \cos \theta_a$ και $a \cos \theta_r$ είναι ίσα, δηλαδή η γωνία πρόσπτωσης θ_a είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης (σκέδασης) θ_r .



(c) Σκέδαση από άτομα σε διαδοχικές σειρές

Η συμβολή κυμάτων από άτομα σε διαδοχικές σειρές είναι ενισχυτική όταν η διαφορά δρόμου $2d \sin \theta$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος, όπως στην Εξ. (36.16).



Καταγράφουμε πάντα σε γωνίες ίσες με τη γωνία πρόσπτωσης

Μεταβάλλουμε τη γωνία πρόσπτωσης (και ανάλυσης)

Από τις κορυφές που εμφανίζονται σε συγκεκριμένες γωνίες υπολογίζεται η απόσταση των κρυσταλλογραφικών επιπέδων d μέσω της σχέσης Bragg:

Συνθήκη Bragg για ενισχυτική συμβολή από δισδιάστατη συστοιχία:

Απόσταση μεταξύ διαδοχικών σειρών στη διάταξη

$$2d \sin \theta = m\lambda \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

Γωνία που σχηματίζει ο m -οστός φωτεινός κροσσός στην οθόνη με την επιφάνεια της συστοιχίας

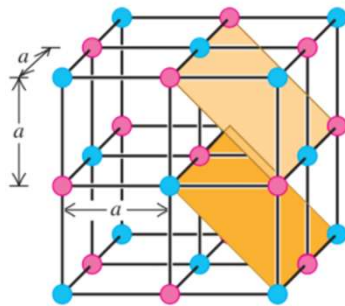
(36.16)

Ένα Απλό Μοντέλο της Περίθλασης Ακτίνων Χ

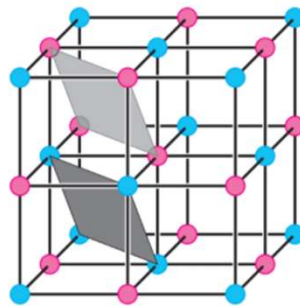
Μπορούμε να επεκτείνουμε την ανάλυση αυτή και σε μια τρισδιάστατη συστοιχία (πλέγμα) θεωρώντας **επίπεδα σκεδαστών** αντί για σειρές τους.

Το Σχ. 36.23 δείχνει δύο διαφορετικές ομάδες παράλληλων επιπέδων που καλύπτουν το σύνολο των σκεδαστών.

(a) Η απόσταση μεταξύ των επιπέδων είναι $d = a/\sqrt{2}$.



(b) Η απόσταση μεταξύ των επιπέδων είναι $d = a/\sqrt{3}$.

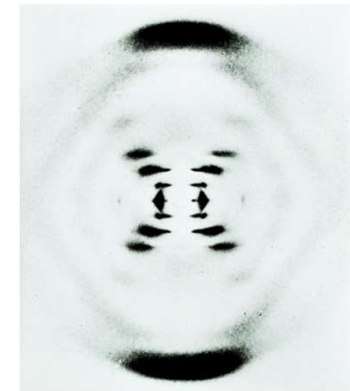


36.23 Ένας κυβικός κρύσταλλος και δύο διαφορετικές οικογένειες κρυσταλλικών επιπέδων. Επιπλέον, υπάρχουν τρεις οικογένειες επιπέδων που είναι παράλληλες με τις έδρες του κύβου, στις οποίες η απόσταση μεταξύ των επιπέδων είναι $d = a$.

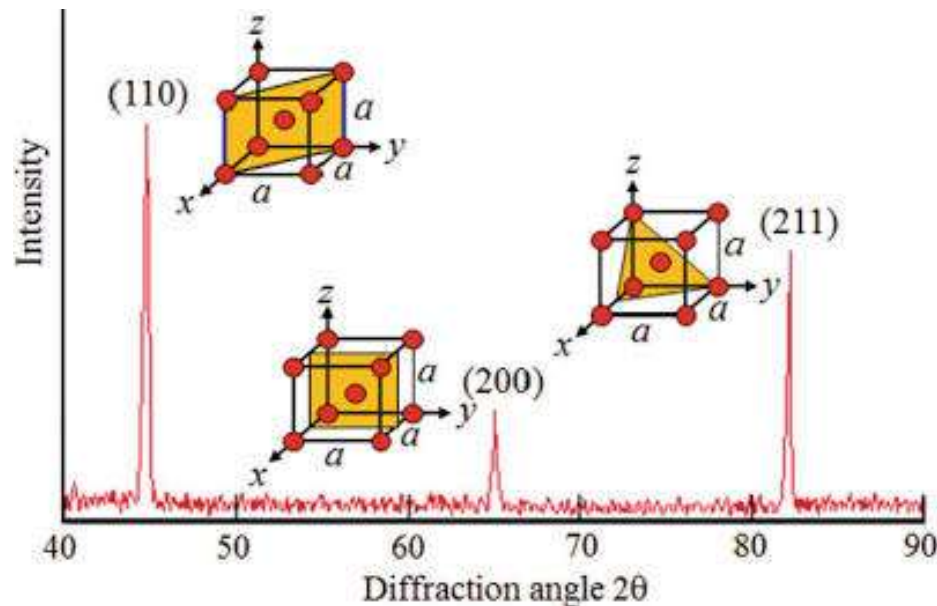
36.24 Η Βρετανίδα επιστήμονας Rosalind Franklin (Ρόζαλιντ Φράνκλιν) παρήγαγε αυτήν την καινοτόμο εικόνα περίθλασης ακτίνων Χ του DNA το 1953. Οι διασταυρούμενοι σκοτεινοί κροσσοί έδωσαν την πρώτη ένδειξη για την ελικοειδή δομή του μορίου του DNA.

Κύματα προερχόμενα από όλους τους σκεδαστές ενός επιπέδου συμβάλλουν ενισχυτικά εάν οι γωνίες πρόσπτωσης και σκέδασης είναι ίσες. Υπάρχει επίσης ενισχυτική συμβολή μεταξύ επιπέδων όταν ικανοποιείται η Εξ. (36.16), όπου d είναι τώρα η απόσταση μεταξύ διαδοχικών επιπέδων. Επειδή υπάρχουν πολλές διαφορετικές ομάδες παράλληλων επιπέδων, υπάρχουν επίσης πολλές τιμές της d και πολλές ομάδες γωνιών που δίνουν ενισχυτική συμβολή για το σύνολο του κρυσταλλικού πλέγματος. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **ανάκλαση Bragg**.

ΠΡΟΣΟΧΗ Η ανάκλαση Bragg είναι στην πραγματικότητα συμβολή Bragg. Οι ανακλάσεις από διάφορα επίπεδα εμφανίζουν απόλυτη αναλογία με τα φαινόμενα συμβολής σε λεπτά υμένια



e.g. XRD Diffractogram of α -Fe (BCC) crystal



$$d = \frac{m\lambda}{2 \sin \theta}$$

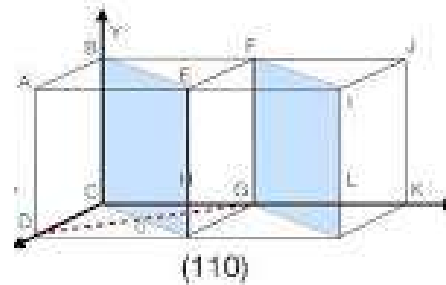
When using Cu $K\alpha$ X-rays ($\lambda=1.54\text{\AA}$) we calculate from the diffraction peak at $\theta=22.4^\circ$ (for the (110) plane in α -Fe), then

$$d_{110} = 1.54 \text{ \AA} / 2 \sin(22.4^\circ) \approx 2.03 \text{ \AA}.$$



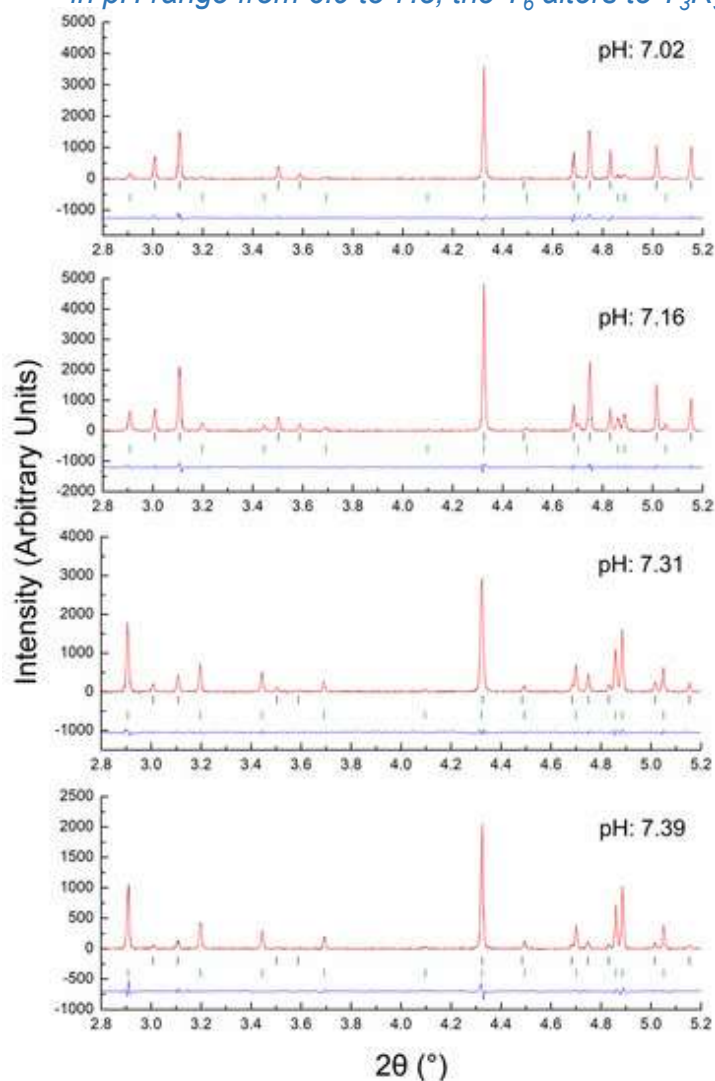
$$d_{200} = 1.54 \text{ \AA} / (2 \times \sin(31.75^\circ)) \approx 1.43 \text{ \AA}.$$

$$d_{211} = 1.17 \text{ \AA}.$$



HI Polymorphs Identified via XRPD

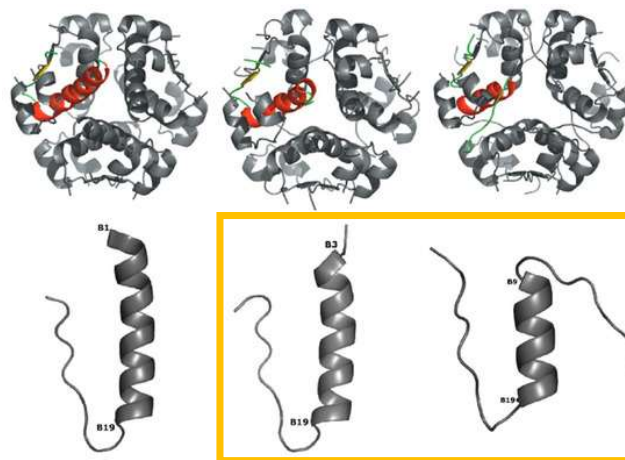
in pH range from 6.9 to 7.5, the T_6 alters to $T_3R_3^f$



HI insulin consists of 51 amino acids in two polypeptide chains: A and B (21 and 30 amino acids, respectively).

The secondary structure of insulin consists of two, almost antiparallel, α -helices in chain A and one α -helix followed by a turn and a β -strand in chain B

he tertiary structure is stabilized by two inter-chain and one intra-chain (in chain A) disulfide bonds, crucial for proper binding to the insulin receptor



Upper part: The three configurations of insulin in the hexameric configuration (from left to right): R_6 , $T_3R_3^f$ and T_6 . The configuration of B-chain N-terminus is illustrated in red in one of the monomers of each hexamer, which differentiates the three forms. Lower part: Isolated view of the configuration of the B-chain N-terminus in each of the three forms respectively

Pawley fits of XRPD data of polycrystalline HI samples exhibiting detectable co-existing molecular polymorphs. Data were collected at ESRF (ID22, RT, $\lambda = 1.29975$ (1) Å). The T_6 and $T_3R_3^f$ molecular conformations of rhombohedral ($R3$) crystal phase were identified and refined simultaneously. The black, red and blue lines indicate the experimental data, the calculated profile and their difference, respectively. The black and green vertical bars correspond to Bragg reflections compatible with space group $R3$ and molecular conformations of T_6 and $T_3R_3^f$, respectively.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 36.5

ΠΕΡΙΘΛΑΣΗ ΑΚΤΙΝΩΝ Χ

Έστω ότι κατευθύνετε μια δέσμη ακτίνων Χ μήκους κύματος 0,154 nm προς μια ομάδα παράλληλων επιπέδων ενός κρυστάλλου πυριτίου. Καθώς αυξάνετε τη γωνία πρόσπτωσης ξεκινώντας από το μηδέν, βρίσκετε ότι το πρώτο έντονο μέγιστο συμβολής εμφανίζεται όταν η δέσμη σχηματίζει γωνία 34,5° με τα επίπεδα. (a) Ποια είναι η απόσταση μεταξύ αυτών των επιπέδων; (b) Θα βρείτε άλλα μέγιστα συμβολής από τα επίπεδα αυτά για μεγαλύτερες γωνίες πρόσπτωσης;

Συνθήκη Bragg για ενισχυτική συμβολή από δισδιάστατη συστοιχία:

Απόσταση μεταξύ διαδοχικών σειρών στη διάταξη

Μήκος κύματος

$$2d \sin \theta = m\lambda \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (36.16)$$

Γωνία που σχηματίζει ο m-στός φωτεινός κροσσός στην οθόνη με την επιφάνεια της συστοιχίας

Bragg m=1

$$(a) \quad d = \frac{m\lambda}{2 \sin \theta} = \frac{(1)(0,154 \text{ nm})}{2 \sin 34,5^\circ} = 0,136 \text{ nm}$$

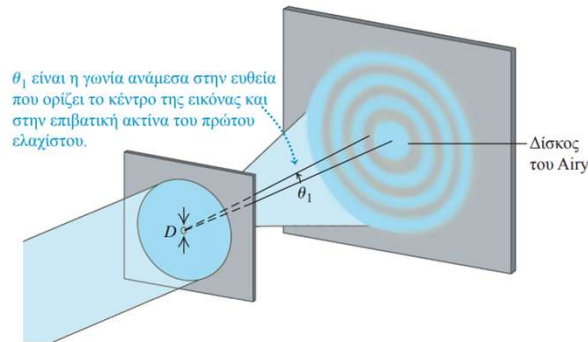
$$(b) \quad \sin \theta = \frac{m\lambda}{2d} = m \frac{0,154 \text{ nm}}{2(0,136 \text{ nm})} = m(0,566)$$

Δεν υπάρχουν γωνίες στις οποίες να εμφανίζονται μέγιστα προερχόμενα από το συγκεκριμένο σύνολο κρυσταλλογραφικών επιπέδων

m=2, $\sin \theta > 1$ αδύνατο

ΚΥΚΛΙΚΑ ΑΝΟΙΓΜΑΤΑ ΚΑΙ ΔΙΑΚΡΙΤΙΚΗ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑ

Ένα άνοιγμα οποιουδήποτε σχήματος σχηματίζει και αυτό μια εικόνα περίθλασης. Η εικόνα περίθλασης που σχηματίζεται από ένα κυκλικό άνοιγμα έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον εξαιτίας του ρόλου που παίζει στον περιορισμό της διακριτικής ισχύος ενός οπτικού οργάνου, δηλαδή στην ικανότητά του να διακρίνει μικρές λεπτομέρειες.



36.25 Εικόνα περίθλασης που σχηματίζεται από κυκλικό άνοιγμα διαμέτρου D . Η εικόνα αποτελείται από μια κεντρική φωτεινή κηλίδα και εναλλασσόμενους σκοτεινούς και φωτεινούς δακτυλίους. Στο σχήμα σημειώνεται η γωνιακή ακτίνα θ_1 του πρώτου σκοτεινού δακτυλίου. (Το διάγραμμα αυτό δεν έχει σχεδιαστεί υπό κλίμακα.)

Γωνιακή ακτίνα του πρώτου σκοτεινού δακτυλίου = γωνιακή ακτίνα του δίσκου Airy

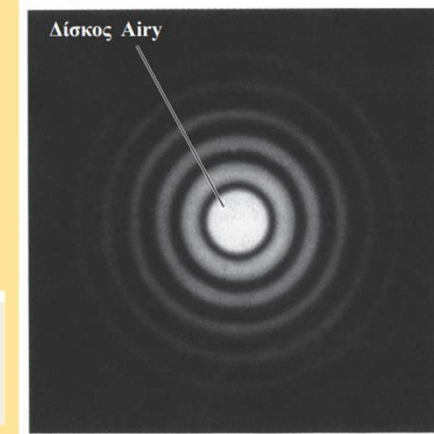
Περίθλαση από κυκλικό άνοιγμα:

$$\sin \theta_1 = 1,22 \frac{\lambda}{D} \quad \text{Μήκος κύματος} \quad \text{Διάμετρος ανοίγματος} \quad (36.17)$$

Οι γωνιακές ακτίνες των δύο επόμενων σκοτεινών δακτυλίων δίνονται από τις σχέσεις

$$\sin \theta_2 = 2,23 \frac{\lambda}{D} \quad \sin \theta_3 = 3,24 \frac{\lambda}{D} \quad (36.18)$$

36.26 Φωτογραφία της εικόνας περίθλασης που σχηματίζεται από ένα κυκλικό άνοιγμα.



Η κεντρική φωτεινή κηλίδα ονομάζεται **δίσκος Airy**

Περίθλαση και Σχηματισμός Ειδώλου

Η περίθλαση έχει σημαντικές επιπτώσεις κατά τον σχηματισμό ειδώλων από φακούς και κάτοπτρα. Αν πρόκειται για δύο σημειακά αντικείμενα, **τα είδωλά τους δεν είναι δύο σημεία αλλά δύο εικόνες περίθλασης**. Αν τα αντικείμενα απέχουν μικρή απόσταση μεταξύ τους, οι εικόνες περίθλασής τους αλληλεπικαλύπτονται. Ένα ευρέως χρησιμοποιούμενο κριτήριο διάκρισης δύο σημειακών αντικειμένων, προτάθηκε από τον Lord Rayleigh (Λόρδος Ρέιλι, 1842- 1919) και ονομάζεται **κριτήριο Rayleigh**: τα αντικείμενα είναι μόλις διακριτά (αυτό σημαίνει ότι είναι διαχωρίσιμα) αν το κέντρο της μιας εικόνας περίθλασης συμπίπτει με το πρώτο ελάχιστο της άλλης. Στην περίπτωση αυτή, η γωνιακή απόσταση των κέντρων των ειδώλων δίνεται από την Εξ. (36.17).

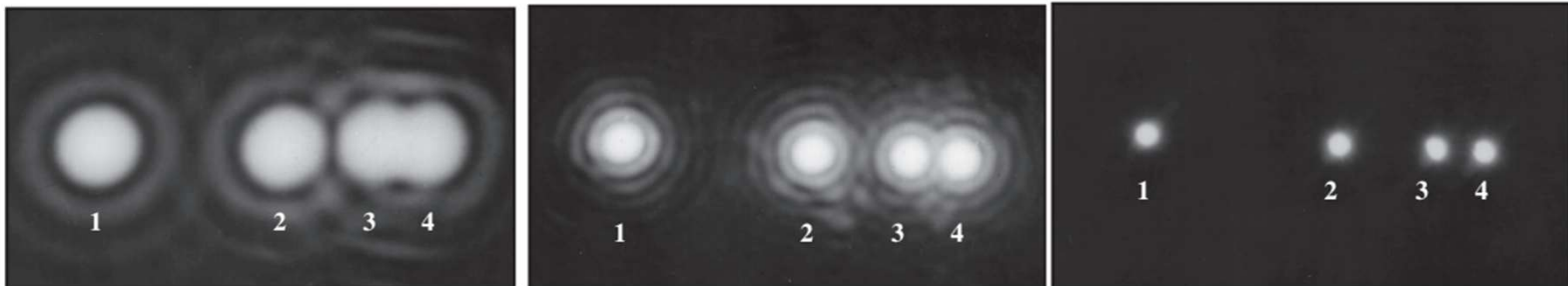
$$\sin \theta_1 = 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

36.27 Εικόνες περίθλασης τεσσάρων πολύ μικρών («σημειακών») πηγών φωτός. Οι φωτογραφίες ελήφθησαν με τη χρήση ενός κυκλικού ανοίγματος (διάφραγμα) τοποθετημένου μπροστά από τον φακό εστίασης. (a) Το άνοιγμα είναι τόσο μικρό, ώστε οι εικόνες των πηγών 3 και 4 να αλληλεπικαλύπτονται και μόλις να διακρίνονται με βάση το **κριτήριο Rayleigh**. Αν αυξηθεί το μέγεθος του ανοίγματος τότε μειώνεται το μέγεθος των εικόνων περίθλασης, όπως φαίνεται στις φωτογραφίες (b) και (c).

(a) Μικρό διάφραγμα

(b) Μεσαίο διάφραγμα

(c) Μεγάλο διάφραγμα

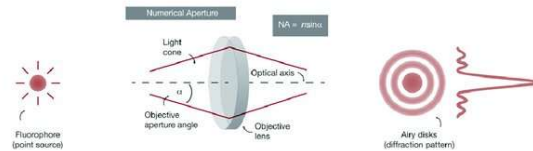


Η ελάχιστη απόσταση δύο αντικειμένων, τα οποία είναι μόλις διακριτά από ένα οπτικό όργανο, ονομάζεται **διακριτικό όριο του οργάνου**. Όσο μικρότερο είναι το διακριτικό όριο τόσο μεγαλύτερη είναι η διακριτική ικανότητα ή **διακριτική ισχύς** του οργάνου. **Η περίθλαση καθορίζει τα ανώτατα όρια διακριτικότητας των φακών**. Το κριτήριο Rayleigh συνδυαζόμενο με την Εξ. (36.17) δείχνει ότι η διακριτική ικανότητα (διακριτική ισχύς) βελτιώνεται με την αύξηση της διαμέτρου· επίσης, **βελτιώνεται για μικρότερα μήκη κύματος**.

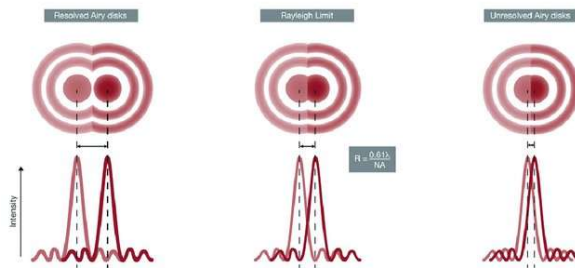
Optical microscope - Resolution

Overlapping Airy Disks The Rayleigh Criterion

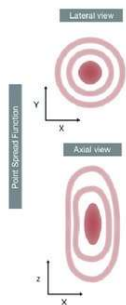
A Numerical Aperture (NA)



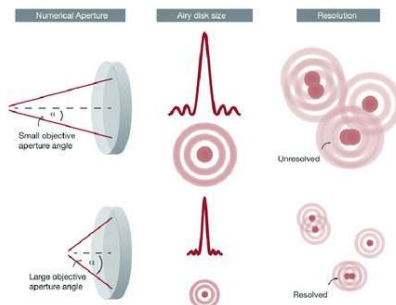
B Resolution (R)



C Point Spread Function (PSF)



D Numerical Aperture, Airy disk size and resolution



The Formula and Limiting Factors

The resolution (d) of an optical microscope is mathematically expressed by the Abbe equation: $d = \frac{\lambda}{2 \cdot NA}$

$$d = \frac{\lambda}{2 \cdot NA}$$

Where:

- d is the minimum resolvable distance (resolution). A smaller d means better resolution

Higher resolution achieved with optical microscope using dry objective is ~200 nm

How can we achieve higher spatial resolution?

Use lower wavelength!

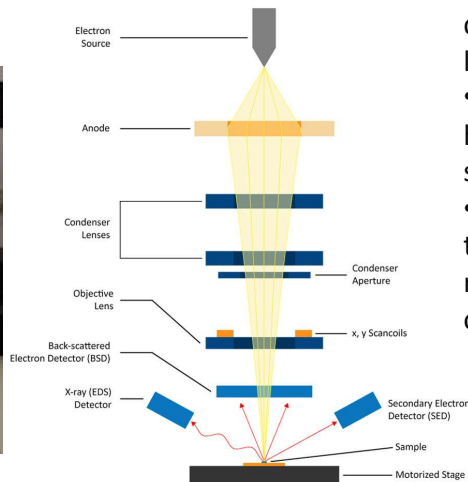
Electron microscope:

Instead of photons, electrons are being used to “illuminate” the sample

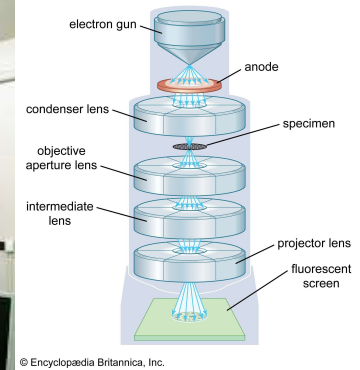
Their de Broglie wavelength is $\lambda = h/p$ (h : Planck constant, p : e-momentum)

Electrons being accelerated by a selected voltage of e.g. 30000V exhibit wavelength of $\lambda = 7\text{pm}$!!!

SEM



TEM



TEM resolution (300kV) ~0.1 nm (why?)

•**Lens Aberrations:** Especially spherical and chromatic aberrations in the electromagnetic lenses, which are difficult to correct perfectly.

•**Instrumentation Issues:** Instabilities in the high-voltage power supplies or lens current supplies, and mechanical drift of the sample.

•**Sample Limitations:** The need for the sample to be extremely thin and susceptible to radiation damage also imposes practical limits on the observable resolution.