

## Διαγράμματα ενέργειας και ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας

• Η θέση  $x = 0$  είναι θέση **ευσταθούς ισορροπίας**.

– Οποιαδήποτε μετατόπιση μακριά από τη συγκεκριμένη θέση προκαλεί μια δύναμη με κατεύθυνση προς τη θέση  $x = 0$ .

• Οι διατάξεις ευσταθούς ισορροπίας αντιστοιχούν στις θέσεις εκείνες για τις οποίες η  $U(x)$  έχει ελάχιστη τιμή.

• Τα σημεία  $x = x_{\max}$  και  $x = -x_{\max}$  είναι τα σημεία αλλαγής κατεύθυνσης.

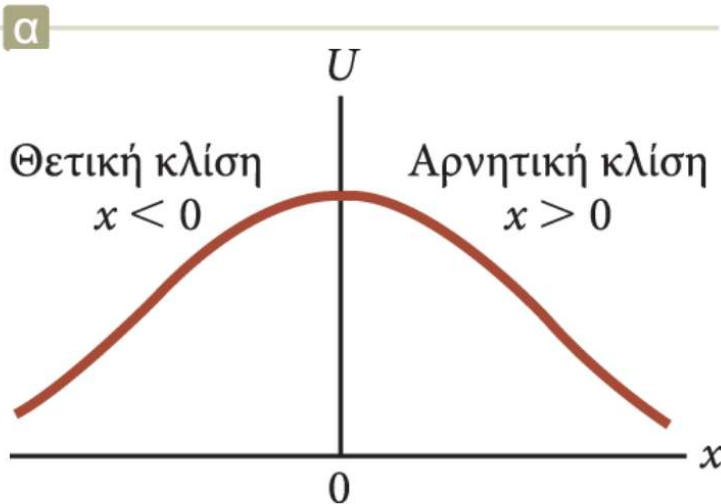
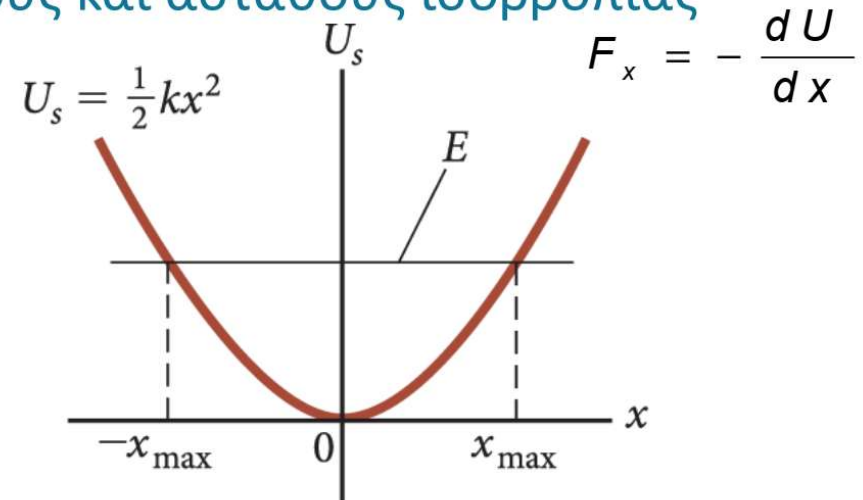
▶ Στη θέση  $x = 0$ ,  $F_x = 0$ , άρα το σωματίδιο βρίσκεται σε ισορροπία.

▶ Για οποιαδήποτε άλλη τιμή του  $x$ , το σωματίδιο απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας.

▶ Αυτό είναι ένα παράδειγμα **ασταθούς ισορροπίας**.

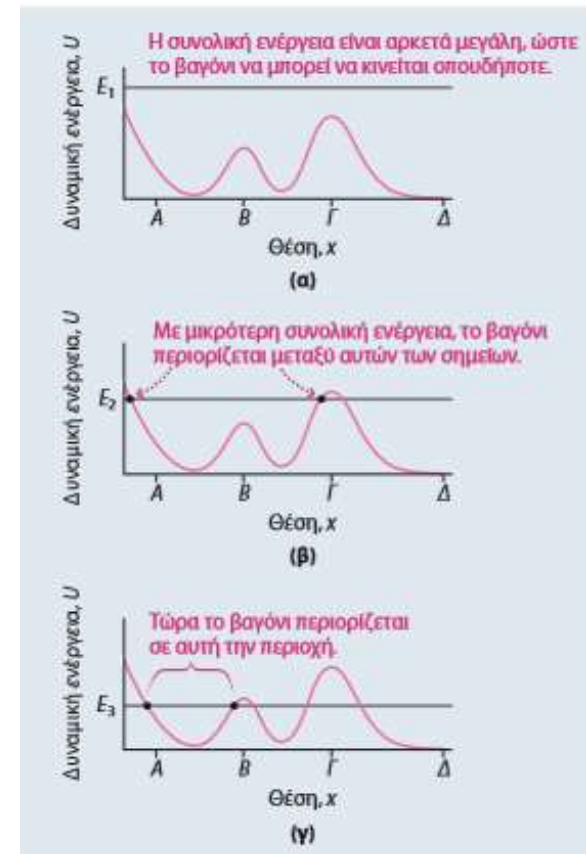
▶ Οι διατάξεις ασταθούς ισορροπίας αντιστοιχούν σε εκείνες τις θέσεις για τις οποίες η  $U(x)$  έχει μέγιστη τιμή.

→ **ΑΔΙΑΦΟΡΗ** ισορροπία



# Καμπύλες δυναμικής ενέργειας

- Οι καμπύλες δυναμικής ενέργειας αναπαριστούν τη δυναμική ενέργεια ενός συστήματος ως συνάρτηση της θέσης και άλλων ποσοτήτων που αντιπροσωπεύουν τη διαμόρφωση του συστήματος
- Ένα σώμα με μια δεδομένη συνολική ενέργεια μπορεί να είναι «παγιδευμένο» σε ένα «πηγάδι δυναμικού» που δημιουργείται από τα σημεία στα οποία η συνολική ενέργεια είναι ίση με τη δυναμική ενέργεια
- Αυτά τα σημεία είναι **σημεία αναστροφής**, πέρα από τα οποία ένα σώμα δεν μπορεί να κινηθεί δεδομένης της σταθερής συνολικής του ενέργειας
- Καμπύλες δυναμικής ενέργειας για το βαγόνι ενός τρένου λούνα παρκ με τρεις διαφορετικές συνολικές ενέργειες:



# Δύναμη και δυναμική ενέργεια

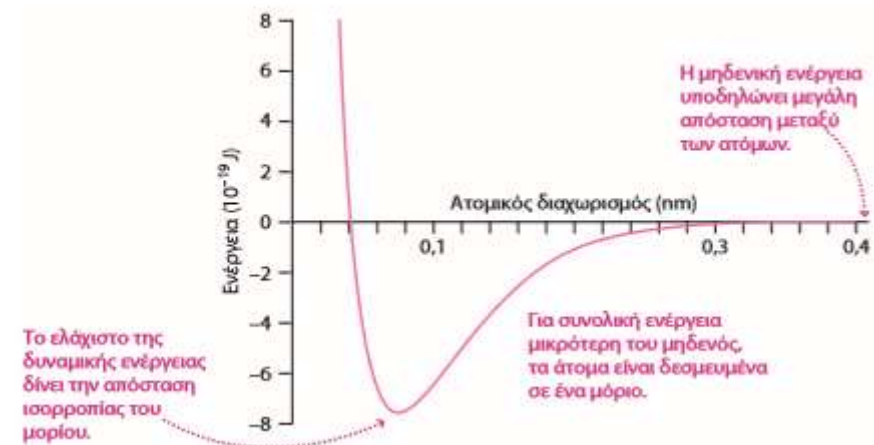
- Η δύναμη είναι μεγαλύτερη στα σημεία όπου το γράφημα είναι απότομο –δηλαδή εκεί όπου η δυναμική ενέργεια μεταβάλλεται ταχύτερα
- Μαθηματικά, η συνιστώσα της δύναμης σε μια δεδομένη κατεύθυνση είναι η αρνητική παράγωγος της δυναμικής ενέργειας ως προς τη θέση σε αυτή την κατεύθυνση:

$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$



# Καμπύλες δυναμικής ενέργειας για ένα μόριο

- Οι καμπύλες δυναμικής ενέργειας μας βοηθούν να προσδιορίσουμε τη δομή συστημάτων, από μόρια μέχρι μηχανικά συστήματα ή πλανήτες.
- Η καμπύλη δυναμικής ενέργεια για ένα ζεύγος ατόμων υδρογόνου αναπαριστάει τη δυναμική ενέργεια ως συνάρτηση της ατομικής απόστασής τους
  - Το ελάχιστο στο γράφημα δείχνει την ενέργεια διαχωρισμού του μορίου  $H_2$
  - Είναι πρακτικό να ορίσουμε τη μηδενική δυναμική ενέργεια όταν τα άτομα είναι απείρως μακριά
  - Τότε οι αρνητικές ενέργειες αναπαριστούν δέσμια συστήματα του μορίου του υδρογόνου.
  - Οι θετικές αναπαριστούν διαχωρισμένα άτομα υδρογόνου



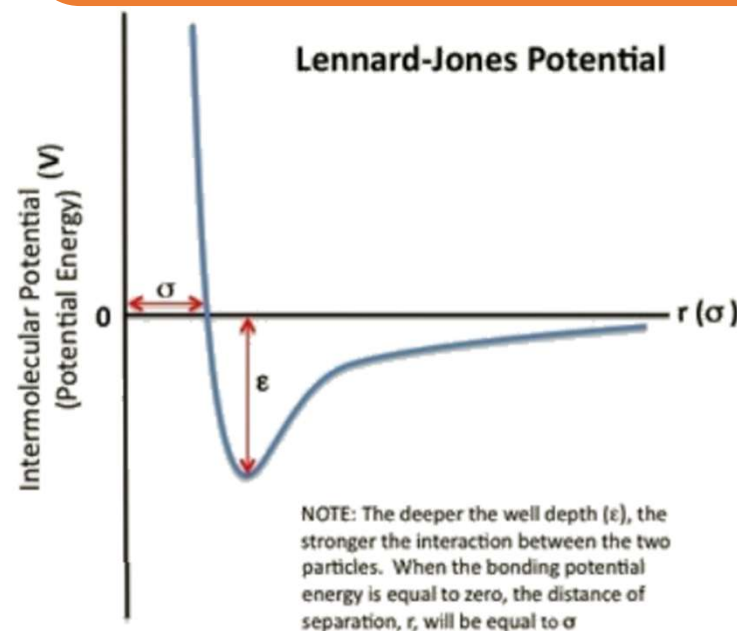
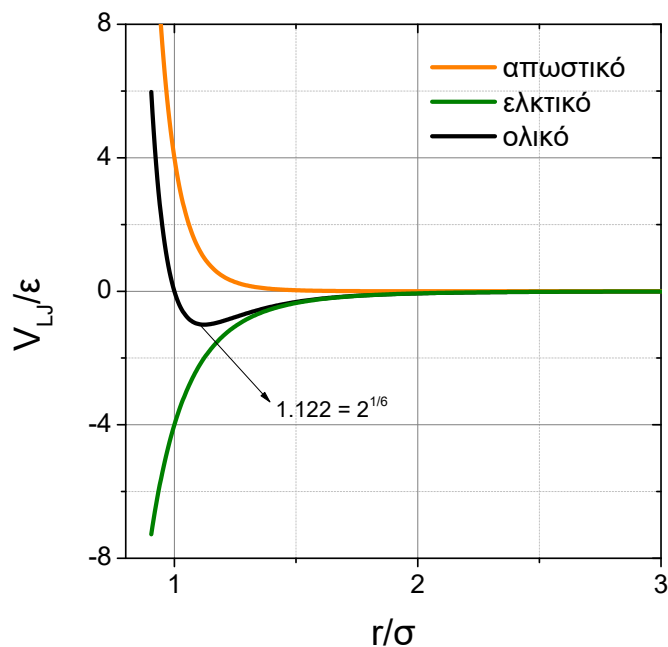
# Lennard – Jones potential απλοποιημένο μοντέλο αλληλεπίδρασης δύο ατόμων ή και μορίων

Δυναμική ενέργεια  $V_{LJ}$  συστήματος δύο ατόμων σε απόσταση  $r$

$$V_{LJ}(r) = 4\epsilon \left[ \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^6 \right]$$

Απωστικός όρος

Ελκτικός όρος



# Lennard – Jones potential απλοποιημένο μοντέλο αλληλεπίδρασης δύο ατόμων ή και μορίων

Δυναμική ενέργεια  $V_{LJ}$  συστήματος δύο ατόμων σε απόσταση  $r$

$$V_{LJ}(r) = 4\varepsilon \left[ \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^6 \right]$$

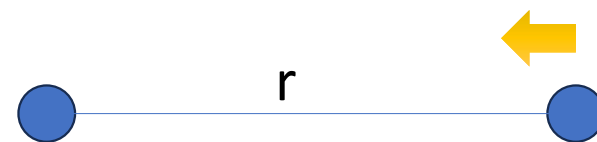
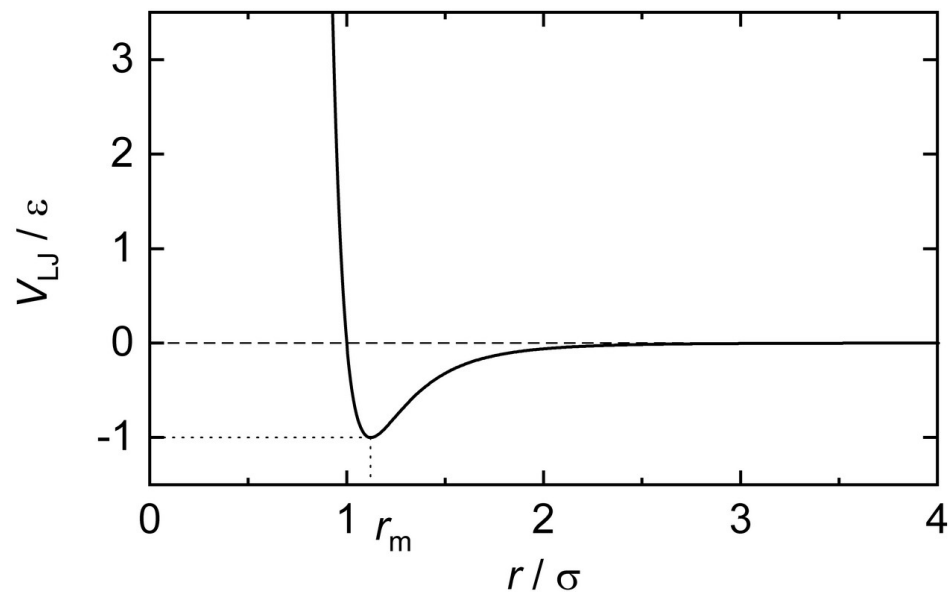
Απωστικός όρος      Ελκτικός όρος

Θεωρούμε αυθαίρετα τη δυναμική ενέργεια μηδέν όταν  $r \rightarrow \infty$ .  $-\varepsilon$  είναι η ελάχιστη τιμή της δυναμικής ενέργειας,  $\sigma$  η απόσταση στην οποία η δυναμική ενέργεια γίνεται μηδέν. Στην απόσταση :

$$r = r_{\min} = 2^{1/6} \sigma$$

η δυναμική ενέργεια  $V_{LJ} = -\varepsilon$

Εφαρμογή:  $\sigma = 0.263 \text{ nm}$ ,  $\varepsilon = 1.51 \cdot 10^{-22} \text{ J}$



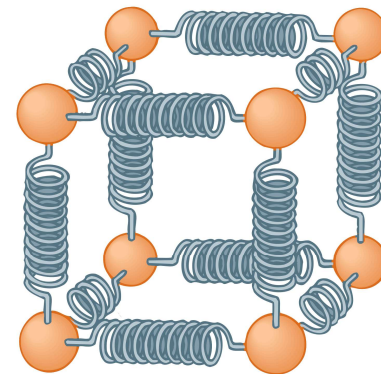
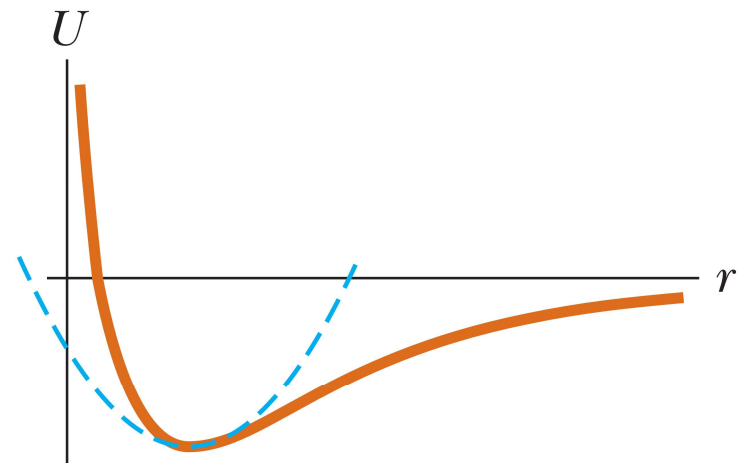
$$F = -dV/dr$$

$\text{O}_2$  molecule  $r_{\min} = 121 \text{ pm}$

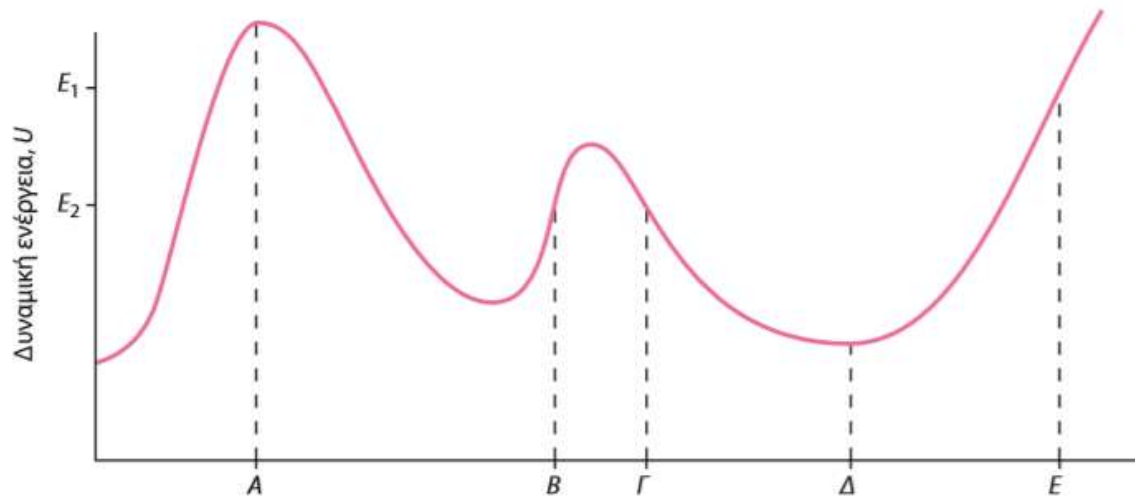
## Lennard – Jones potential απλοποιημένο μοντέλο αλληλεπίδρασης δύο ατόμων ή και μορίων

Κατά προσέγγιση η δυναμική ενέργεια του LJ συναρτήσσει της απόστασης παρόλο που είναι μια αρκετά πολύπλοκη συνάρτηση, προσομοιάζει εκείνη του αρμονικού ταλαντωτή (παραβολή  $E=kx^2/2$ ).

Έτσι ο χημικός δεσμός μεταξύ ατόμων μπορεί να προσομοιαστεί με μικρά ελατήρια που συγκρατούν τα άτομα γύρω από τη θέση ισορροπίας (ελάχιστο στη δυναμική ενέργεια).



- Το σχήμα δείχνει τη δυναμική ενέργεια που σχετίζεται με ένα ηλεκτρόνιο σε μια μικροηλεκτρονική συσκευή. Σε ποιο από τα σημεία που έχουν επισημανθεί η δύναμη επί του ηλεκτρονίου είναι μεγαλύτερη;



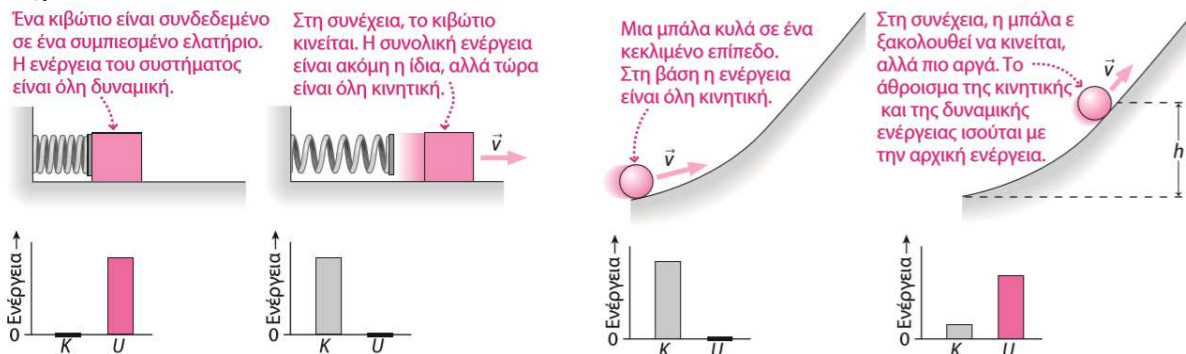


# Σύνοψη

- Η **δυναμική ενέργεια** είναι αποθηκευμένη ενέργεια που μπορεί να μετατραπεί σε κινητική ενέργεια
- Η μεταβολή στη δυναμική ενέργεια είναι το αρνητικό έργο που παράγεται από μια διατηρητική δύναμη, καθώς ένα σώμα κινείται σε οποιαδήποτε διαδρομή μεταξύ δύο σημείων:

$$\Delta U = - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

- Όταν δρουν μόνο διατηρητικές δυνάμεις, η συνολική μηχανική ενέργεια  $K + U$  διατηρείται:



- Οι **καμπύλες δυναμικής ενέργειας** περιγράφουν τη δυναμική ενέργεια ως συνάρτηση της θέσης και άλλων ποσοτήτων που αντιπροσωπεύουν τη διαμόρφωση του συστήματος
- Η **δύναμη** είναι η αρνητική παράγωγος της δυναμικής ενέργειας:  $F_x = -dU/dx$ .

# ΙΣΧΥΣ

Ορίζεται σαν το πηλίκο του έργου που παράγεται σε συγκεκριμένο χρόνο δια το χρόνο αυτό

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

$$P = \frac{dW}{dt}$$

Μονάδα μέτρησης  
WATT = J/s

Μπορεί να γραφεί και σαν

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{u}$$

**ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΑΠΟΔΟΣΗΣ** μιας μηχανής: το πηλίκο της ισχύος που αποδίδει η μηχανή προς την ισχύ που προσφέρεται σε αυτή

$$n = \frac{P_{\alpha}}{P_{\pi}} \leq 1$$

3. Ένας ορειβάτης μάζας 75 kg μεταφέρει στην πλάτη του ένα σακκίδιο 25 kg καθώς ανεβαίνει ένα μονοπάτι, η μέση κλίση του οποίου είναι  $5^\circ$ , διανύοντας απόσταση 3 km. Το συνολικά παραγόμενο έργο από τον ορειβάτη είναι περίπου ίσο με: (α) 260 kJ, (β) 65 kJ, (γ) 3.000 kJ, (δ) -260 kJ.

7. Το νερό φεύγει από το ανοικτό άκρο ενός σωλήνα ποτίσματος με ταχύτητα 5 m/s κατακόρυφα προς τα επάνω. Αν το στόμιο του σωλήνα βρίσκεται σε ύψος 2 m, υπολογίστε την ταχύτητα με την οποία το νερό χτυπά στο έδαφος.

16. Η έλξη που ασκεί ένα μόριο της πρωτεΐνης της μυοσίνης σε μια ίνα ακτίνης, έτσι ώστε να παραχθεί η τάση σε ένα μυ, γίνεται σε κύκλους κατά τη διάρκεια των οποίων μια δύναμη της τάξης του 1 pN, προκαλεί μια μετατόπιση περίπου ίση με 10 nm. Κάθε τέτοιος κύκλος έλξης-μετατόπισης

οφείλεται στη διάσπαση ενός μορίου ATP από το οποίο ελευθερώνεται ενέργεια περίπου ίση με  $4,9 \times 10^{-20}$  J.

(α) Πόσο έργο παράγεται από ένα μόριο μυοσίνης κατά τη διάρκεια ενός κύκλου έλξης-μετατόπισης;

(β) Ποιά είναι η απόδοση της διαδικασίας; Ποίο ποσοστό δηλαδή της ενέργειας που απελευθερώνεται από το μόριο του ATP μετατρέπεται σε χρήσιμο έργο;

9. Ένας ορειβάτης μάζας 65 kg ανεβαίνει, κατά τη διάρκεια της προπόνησής του, έναν κατακόρυφο τοίχο ύψους 200 m σε χρόνο 10 min. Υπολογίστε το έργο που παράγεται από τη δύναμη του βάρους πάνω στον ορειβάτη. Αν ο ορειβάτης καταναλώνει οξυγόνο με ρυθμό 2 L/min, και έτσι παράγει εσωτερικά ενέργεια  $4 \times 10^4$  J/min, ποιο κλάσμα της ενέργειας αυτής χρησιμοποιείται για την ανάβαση στον τοίχο; (Το κλάσμα που υπολογίσατε, είναι η απόδοση του ορειβάτη).

11. Ένας αθλητής της άρσης βαρών σηκώνει ένα βάρος 1.200 N, ασκώντας μια μέση δύναμη 1.400 N για το πρώτο μέτρο της ανύψωσης από το έδαφος, στη συνέχεια χαλαρώνει τη λαβή του και «κάθεται κάτω από τη μπάρα», προκειμένου να τη συγκρατήσει, και ολοκληρώνει την προσπάθειά του ασκώντας μια ώθηση ώστε να σηκωθεί με τα χέρια του σε πλήρη ανάταση.

(α) Πόσο έργο παράγει ο αθλητής στο πρώτο 1 m της ανύψωσης του βάρους; Πόσο έργο παράγει η δύναμη του βάρους για την ίδια απόσταση;

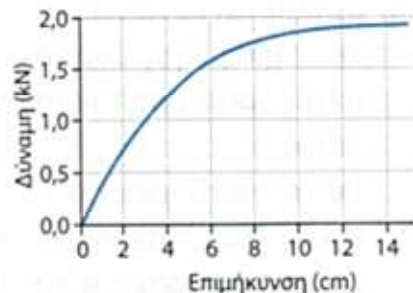
(β) Ποιά ταχύτητα έχει αποκτήσει το βάρος στο τέλος αυτού του πρώτου μέτρου;

(γ) Αν ο αθλητής πάψει να ασκεί δύναμη μετά από το πρώτο 1 m, σε ποιο ύψος, επιπλέον του 1 m, θα ανέβει το βάρος και πόσο χρόνο θα χρειαστεί για αυτό; Κατά τη διάρκεια αυτού του χρονικού διαστήματος, ο αθλητής θα πρέπει να προλάβει να «μπει κάτω από τη μπάρα» και στη συνέχεια να σηκωθεί ωθώντας τα βάρη ώστε να φθάσουν

στην τελική τους θέση, έχοντας τα χέρια σε πλήρη ανάταση.

(δ) Πόσο επιπλέον έργο θα πρέπει να παράγει ο αθλητής προκειμένου να σηκώσει τα βάρη, με σταθερή ταχύτητα, σε τελικό ύψος 2,4 m, που είναι το ύψος που φθάνει έχοντας τα χέρια του σε πλήρη ανάταση;

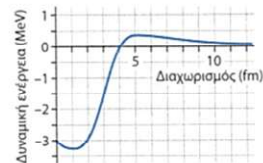
42. Ο αυχενικός σύνδεσμος είναι μια δομή που μοιάζει με **BIO** κορδόνι και βρίσκεται κατά μήκος του πίσω μέρος του αυχένα υποστηρίζοντας μεγάλο μέρος του σωματικού βάρους σε ζώα όπως τα άλογα και οι αγελάδες. Ο σύνδεσμος είναι εξαιρετικά δύσκαμπτος για μικρές επιμηκύνσεις, αλλά χαλαρώνει καθώς εκτείνεται περαιτέρω, λειτουργώντας ως βιολογικός απορροφητής κραδασμών. Το Σχήμα 7.17 δείχνει την καμπύλη δύναμης-απόστασης για έναν συγκεκριμένο αυχενικό σύνδεσμο. Η καμπύλη μπορεί να μοντελοποιηθεί κατά προσέγγιση από την έκφραση  $F(x) = 0,43x - 0,033x^2 + 0,00086x^3$ , με  $F$  σε kN και  $x$  σε cm. Βρείτε την ενέργεια που αποθηκεύεται στον σύνδεσμο όταν έχει επιμηκυνθεί κατά (α) 7,5 cm και (β) 15 cm.



ΣΧΗΜΑ 7.17 Πρόβλημα 42

### Προβλήματα μετάβασης

Η πυρηνική σύντηξη είναι η διαδικασία που τροφοδοτεί τον Ήλιο. Σύντηξη συντελείται όταν δύο ατομικοί πυρήνες μικρής μάζας συγχωνεύονται για να σχηματίσουν έναν μεγαλύτερο πυρήνα. Κατά τη διαδικασία αυτή απελευθερώνεται σημαντική ενέργεια. Αυτό είναι δύσκολο να επιτευχθεί επειδή οι ατομικοί πυρήνες φέρουν θετικό ηλεκτρικό φορτίο και η ηλεκτρική τους άπωση καθιστά αρκετά δύσκολη την προσέγγισή τους, ώστε η πυρηνική δύναμη μικρής εμβέλειας να τους συνδέσει σε έναν ενιαίο πυρήνα. Το Σχήμα 7.25 δείχνει την καμπύλη δυναμικής ενέργειας για τη σύντηξη δύο δευτερίων (βαρείς πυρήνες υδρογόνου). Η ενέργεια μετράται σε εκατομμύρια ηλεκτρονιοβόλτ (MeV), μονάδα που χρησιμοποιείται συνήθως στην πυρηνική φυσική, και ο διαχωρισμός είναι σε φεμτόμετρα ( $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$ ).

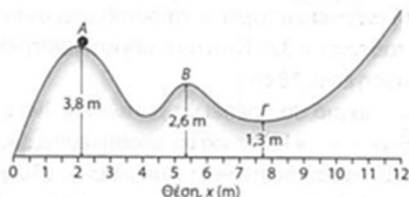


ΣΧΗΜΑ 7.25 Δυναμική ενέργεια για δύο δευτέρια (Προβλήματα μετάβασης 68-71)

68. Η δύναμη μεταξύ των δύο δευτερίων είναι μηδέν περίπου στα
- 3 fm.
  - 4 fm.
  - 5 fm.
  - η δύναμη δεν είναι ποτέ μηδέν.
69. Προκειμένου αρχικά τα δύο δευτέρια που είναι ελαφρώς διαχωρισμένα να έρθουν κοντά ώστε να συντηχηθούν, η κινητική τους ενέργεια πρέπει να είναι περίπου
- 0,1 MeV.
  - 3 MeV.
  - 3 MeV.
  - 0,3 MeV.

70. Η διαθέσιμη ενέργεια για τη σύντηξη είναι η ενεργειακή διαφορά μεταξύ αυτής των πολύ απομακρυσμένων δευτερίων και των δεσμευμένων δευτερίων αφού έχουν «πέσει» στο βαθύ πηγάδι δυναμικού που φαίνεται στο σχήμα. Αυτή η ενέργεια είναι περίπου
- 0,3 MeV.
  - 1 MeV.
  - 3,3 MeV.
  - 3,6 MeV.
71. Όταν τα δύο δευτέρια απέχουν 4 fm, η δύναμη που ενεργεί πάνω τους
- είναι απωθητική.
  - είναι ελκτική.
  - είναι μηδέν.
  - δεν μπορεί να καθοριστεί από το γράφημα.

26. Ένα σωματίδιο ολισθαίνει χωρίς τριβή κατά μήκος της διαδρομής που φαίνεται στο Σχήμα 7.16, ξεκινώντας από την ηρεμία από το σημείο Α. Βρείτε (α) την ταχύτητά του στο Β, (β) την ταχύτητά του στο Γ και (γ) την κατά προσέγγιση θέση του δεξιού σημείου αναστροφής.



ΣΧΗΜΑ 7.16 Άσκηση 26

27. Ένα σωματίδιο ολισθαίνει μπροστά και πίσω σε μια διαδρομή χωρίς τριβή της οποίας το ύψος ως συνάρτηση της οριζόντιας θέσης  $x$  είναι  $y = ax^2$ , όπου  $a = 0,92 \text{ m}^{-1}$ . Αν η μέγιστη ταχύτητα του σωματιδίου είναι  $8,5 \text{ m/s}$ , βρείτε τα σημεία αναστροφής του.
28. Ένα σωματίδιο παγιδεύεται σε ένα πηγάδι δυναμικού που περιγράφεται από τη σχέση  $U(x) = 16x^2 - b$ , με  $U$  σε J,  $x$  σε m και  $b = 4,0 \text{ J}$ . Βρείτε τη δύναμη επί του σωματιδίου όταν βρίσκεται στα (α)  $x = 2,1 \text{ m}$ , (β)  $x = 0 \text{ m}$  και (γ)  $x = -1,4 \text{ m}$ .

34. Σε έναν ιατρικό σωλήνα ακτίνων X, τα ηλεκτρόνια επιταχύνονται σε ταχύτητα  $10^8 \text{ m/s}$  και στη συνέχεια προσπίπτουν σε στόχο βολφραμίου. Καθώς σταματούν, η ταχεία επιτάχυνση των ηλεκτρονίων παράγει ακτίνες X. Αν ο χρόνος που απαιτείται για να σταματήσει ένα ηλεκτρόνιο είναι της τάξης των  $10^{-9} \text{ s}$ , περίπου πόσο μακριά κινείται μέχρι να σταματήσει;

34. Για μικρές επιμηκύνσεις, ο αχιλλεύς τένοντας μπορεί να θεωρηθεί ένα ιδανικό ελατήριο. Πειράματα που έγιναν με χρήση ενός συγκεκριμένου τένοντα έδειξαν ότι αυτός τεντώνεται  $2,66 \text{ mm}$  όταν μια μάζα  $125 \text{ kg}$  είναι κρεμασμένη από αυτόν. (α) Βρείτε τη σταθερά ελατηρίου αυτού του τένοντα. (β) Πόσο θα πρέπει να τεντώσει για να αποθηκεύσει ενέργεια  $50,0 \text{ J}$ ;

32. Ένα μόριο μονοξειδίου του άνθρακα μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ένα άτομο άνθρακα και ένα άτομο οξυγόνου που συνδέονται με ένα ελατήριο. Αν μια μετατόπιση του άνθρακα κατά  $1,46 \text{ pm}$  από τη θέση ισορροπίας του σε σχέση με το οξυγόνο αυξάνει τη δυναμική ενέργεια του μορίου κατά  $0,0125 \text{ eV}$ , ποια είναι η σταθερά ελατηρίου;

54. Οι μύες στα πόδια μιας ακρίδας μπορούν να ωθήσουν το έντομο προς τα πάνω με  $3,0 \text{ m/s}$ . Πόσο ψηλά μπορεί να πηδήξει η ακρίδα;

50. Στα ιοντικά στερεά όπως το  $\text{NaCl}$  (αλάτι), η δυναμική ενέργεια ενός ζεύγους ιόντων παίρνει τη μορφή  $U = b/r^n - a/r$ , όπου  $r$  είναι η απόσταση μεταξύ των ιόντων. Για το  $\text{NaCl}$ , τα  $a$  και  $b$  έχουν τιμές σε SI  $4,04 \times 10^{-28}$  και  $5,52 \times 10^{-98}$ , αντίστοιχα, και  $n = 8,22$ . Βρείτε την απόσταση ισορροπίας στο  $\text{NaCl}$ .