

# ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

## ΔΥΝΑΜΙΚΗ →

Εξετάζει την κίνηση σε σχέση με το αίτιο που την προκαλεί  
(απαντάει σε ερωτήματα «γιατί...;» π.χ. Γιατί είναι πιο δύσκολο να ελέγξουμε ένα αυτοκίνητο που κινείται πάνω σε πάγο σε σχέση με την κίνησή του πάνω σε οδόστρωμα;)

## ΔΥΝΑΜΗ →

Περιγράφει την **αλληλεπίδραση** μεταξύ δύο σωμάτων ή ενός σώματος και του περιβάλλοντος

Το αίτιο που προκαλεί τη μεταβολή της κινητικής κατάστασης ενός υλικού σημείου/σώματος

Είναι **ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟ** μέγεθος

Η σύγχρονη φυσική χωρίζει τις δυνάμεις σε τέσσερις μεγάλες κατηγορίες

ΒΑΡΥΤΙΚΗ

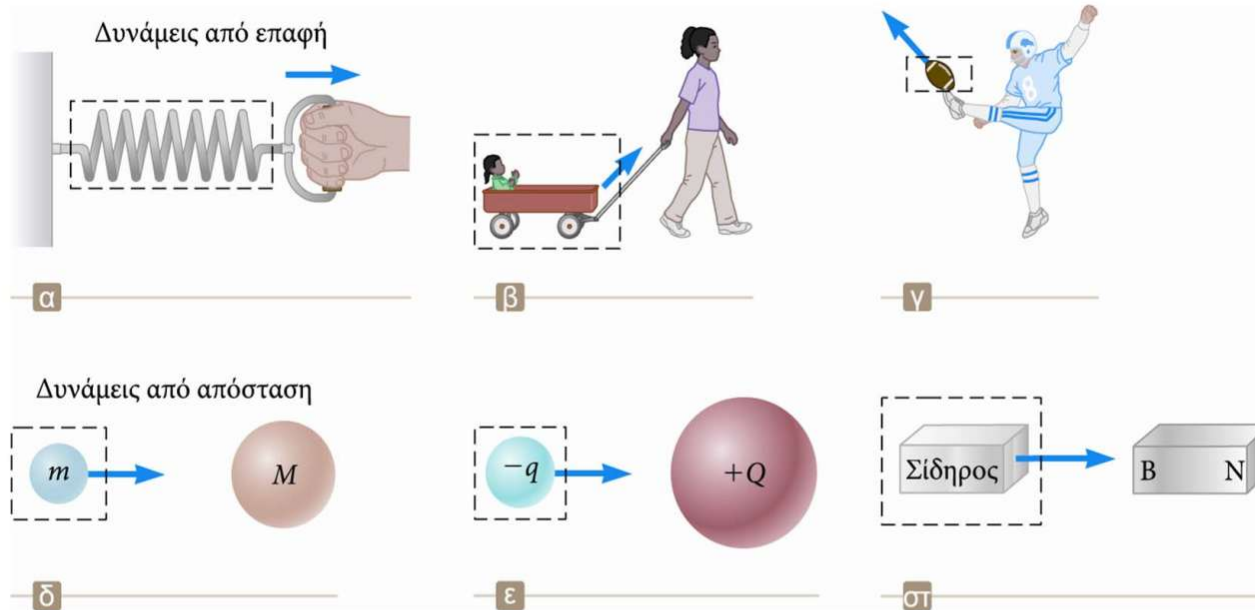
ΑΣΘΕΝΗΣ ΠΥΡΗΝΙΚΗ

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗ

ΙΣΧΥΡΗ ΠΥΡΗΝΙΚΗ

Στην καθημερινότητα οι δυνάμεις μπορούν να χωριστούν σε δυνάμεις που ασκούνται εξ επαφής και σε δυνάμεις που ασκούνται από απόσταση [Παραδείγματα;]

# Κατηγορίες Δυνάμεων



► Οι δυνάμεις από επαφή αναπτύσσονται κατά τη φυσική επαφή δύο σωμάτων.

► Παραδείγματα α, β, γ

► Οι δυνάμεις από απόσταση δρουν μέσα στον κενό χώρο.

► Δεν απαιτείται φυσική επαφή

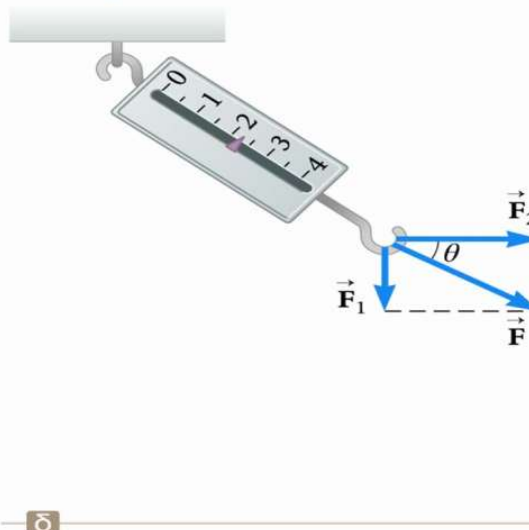
► Παραδείγματα δ, ε, στ

# Θεμελιώδης Δυνάμεις

- Βαρυτικές δυνάμεις: Μεταξύ σωμάτων (μαζών)
  - Ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις: Μεταξύ ηλεκτρικών φορτίων
  - Ισχυρές (ή πυρηνικές) δυνάμεις: Μεταξύ υποατομικών σωματιδίων
  - Ασθενείς δυνάμεις: Αναπτύσσονται σε ορισμένες διεργασίες ραδιενεργούς διάσπασης
- Όλες οι θεμελιώδεις δυνάμεις είναι δυνάμεις από απόσταση.

## Διανυσματική φύση των δυνάμεων

Όταν η  $\vec{F}_1$  έχει κατεύθυνση προς τα κάτω και η  $\vec{F}_2$  έχει οριζόντια κατεύθυνση, ο συνδυασμός των δύο δυνάμεων επιμηκύνει το ελατήριο κατά 2.24 cm.



Οι δυνάμεις είναι διανύσματα. Άρα, η συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα, υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τους κανόνες της πρόσθεσης διανυσμάτων.

# ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ ΔΥΝΑΜΗΣ - ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΟΣ

## ΝΟΜΟΙ Newton

Ένα σώμα στο οποίο δεν ασκείται καμμία δύναμη ή το σύνολο των δυνάμεων που ασκούνται σε αυτό είναι μηδέν, κινείται με **ΣΤΑΘΕΡΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ**

Ένα σώμα στο οποίο ασκείται σταθερή δύναμη, το σώμα κινείται με σταθερή επιτάχυνση [Θεμελιώδης εξίσωση της δυναμικής]

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$m$ , η μάζα του σώματος



Ένα σώμα Α που αλληλεπιδρά με σώμα Β ασκώντας σε αυτό μια δύναμη, δέχεται από το Β δύναμη ίσου μέτρου και διεύθυνσης αλλά αντίθετης φοράς

# Νόμοι της κίνησης

## Ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα- Νόμος της Αδράνειας

**Αν δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις και οι παρατηρήσεις γίνονται από ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, τότε ένα ακίνητο σώμα θα παραμείνει σε ηρεμία και ένα σώμα που κινείται θα συνεχίσει να κινείται με σταθερή ταχύτητα.**

- Ο πρώτος νόμος μας επιτρέπει επίσης να ορίσουμε τη **δύναμη** ως **το αίτιο της μεταβολής της κίνησης ενός σώματος**.
- Η καλύτερη προσέγγιση ενός αδρανειακού συστήματος είναι ένα σύστημα αναφοράς που κινείται με σταθερή ταχύτητα σε σχέση με τους μακρινούς απλανείς αστέρες.  
Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η Γη είναι ένα τέτοιο αδρανειακό σύστημα, παρόλο που στην κίνησή της υπάρχει μια μικρή κεντρομόλος επιτάχυνση.

## Αδράνεια και μάζα

- ▶ Η τάση ενός σώματος να προβάλλει αντίσταση στη μεταβολή της ταχύτητάς του ονομάζεται **αδράνεια**.
- ▶ Η **μάζα** είναι η ιδιότητα ενός σώματος η οποία καθορίζει πόση αντίσταση προβάλλει το σώμα στις μεταβολές της ταχύτητάς του.
- ▶ Οι μάζες των σωμάτων μπορούν να οριστούν συναρτήσει των επιταχύνσεων που προκαλεί **μια συγκεκριμένη δύναμη** η οποία ασκείται σε αυτά. Το μέτρο της επιτάχυνσης ενός σώματος είναι αντιστρόφως ανάλογο προς τη μάζα του.

$$\frac{m_1}{m_2} \equiv \frac{a_2}{a_1}$$

# Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα

▶ Όταν παρατηρούμε ένα σώμα από ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, η επιτάχυνση του σώματος είναι ανάλογη προς τη συνολική δύναμη που ασκείται σε αυτό και αντιστρόφως ανάλογη προς τη μάζα του.

▶ Η δύναμη είναι η αιτία της μεταβολής της κίνησης, την οποία μετράμε με την επιτάχυνση.

▶ Αλγεβρικά,

$$\vec{a} \propto \frac{\sum \vec{F}}{m} \rightarrow \sum \vec{F} = m\vec{a}$$

▶ Η  $\sum \vec{F}$  είναι η συνολική δύναμη.

▶ Είναι το διανυσματικό άθροισμα, δηλαδή η συνισταμένη, όλων των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα.

▶ Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα μπορεί να εκφραστεί με τη μορφή εξισώσεων συνιστωσών:

▶  $\sum F_x = m\alpha_x$

▶  $\sum F_y = m\alpha_y$

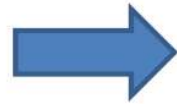
▶  $\sum F_z = m\alpha_z$

▶ Μην ξεχνάτε ότι το γινόμενο  $m\alpha$  δεν είναι δύναμη.

▶ Το άθροισμα των δυνάμεων εξισώνεται με το γινόμενο της μάζας του σώματος και της επιτάχυνσης του.

# ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ

$$\vec{F} = m\vec{a}$$



Από το νόμο αυτόν ορίζουμε τη μονάδα μέτρησης της δύναμης:

$$\text{SI} \rightarrow 1\text{N} = 1\text{Kg} \ 1\text{m/s}^2$$

$$\text{CGS} \rightarrow 1\text{d} = 1\text{g} \ 1\text{cm/s}^2$$

# NOMOI Newton

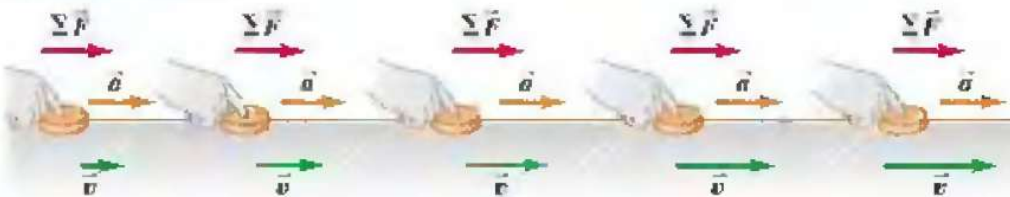
(a) A puck moving with constant velocity (in equilibrium):  $\Sigma \vec{F} = 0, \vec{a} = 0$



$$\Sigma F = 0$$

Ευθύγραμμη ομαλή

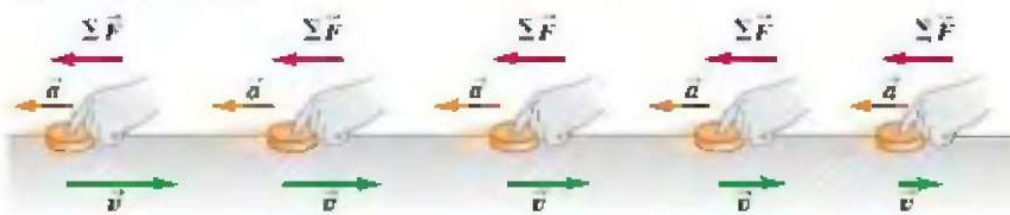
(b) A constant net force in the direction of motion causes a constant acceleration in the same direction as the net force.



$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Ομαλά επιταχυνόμενη

(c) A constant net force opposite the direction of motion causes a constant acceleration in the same direction as the net force.



$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Ομαλά επιβραδυνόμενη



# Μάζα

- Η μάζα είναι εγγενής ιδιότητα ενός σώματος.
- Η μάζα είναι ανεξάρτητη από το περιβάλλον του σώματος.
- Η μάζα είναι ανεξάρτητη από τη μέθοδο μέτρησής της.
- Η μάζα είναι βαθμωτό μέγεθος.
- Η μονάδα της μάζας στο σύστημα SI είναι το χιλιόγραμμα (kg).

## Βάρος-Δύναμη της βαρύτητας

- ▶ Η μάζα και το βάρος είναι δύο διαφορετικά μεγέθη.
- ▶ Η δύναμη που ασκεί η Γη στα σώματα ονομάζεται δύναμη της βαρύτητας (ή βαρυτική δύναμη)
- ▶ Έχει κατεύθυνση προς το κέντρο της Γης.
- ▶ Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα:  $\vec{F}_g = m\vec{g}$
- ▶ Το μέτρο της ονομάζεται βάρος του σώματος. Βάρος  $= F_g = mg$
- ▶ Μεταβάλλεται ανάλογα με τη θέση.
- ▶ Παράδειγμα:  $m_{Γης} = 2 \text{ kg}$ ,  $m_{Σελήνης} = 2 \text{ kg}$

## Βαρυτική μάζα και αδρανειακή μάζα

▶ Στους νόμους του Νεύτωνα, η μάζα είναι η αδρανειακή μάζα και αποτελεί ένα μέτρο της αντίστασης που προβάλλει το σώμα στις μεταβολές της κίνησής του.

▶ Στη δύναμη της βαρύτητας, η μάζα καθορίζει τη βαρυτική έλξη μεταξύ του σώματος και της Γης.

▶ Σύμφωνα με τα πειράματα, η βαρυτική μάζα και η αδρανειακή μάζα έχουν την ίδια τιμή.

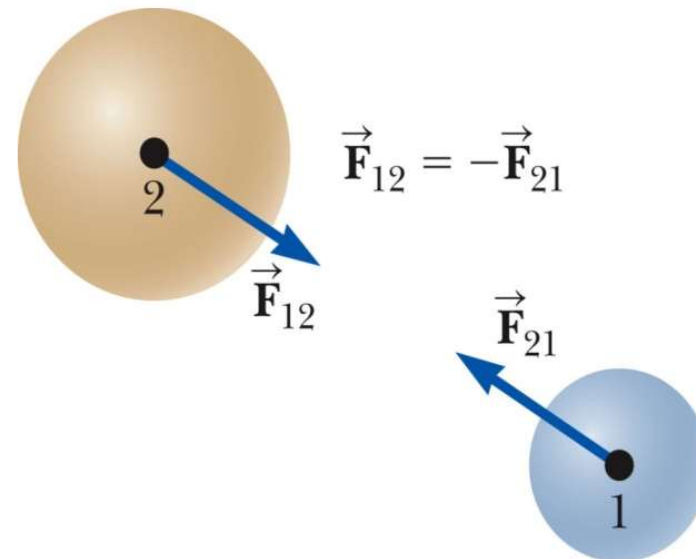
# Ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα

▶ Αν δύο σώματα αλληλεπιδρούν, η δύναμη  $\vec{F}_{12}$  που ασκεί το σώμα 1 στο σώμα 2 έχει το ίδιο μέτρο και αντίθετη κατεύθυνση από τη δύναμη  $\vec{F}_{21}$  που ασκεί το σώμα 2 στο σώμα 1.

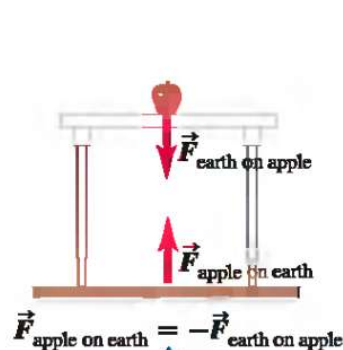
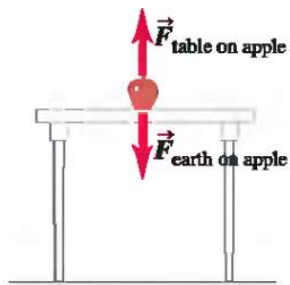
$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

▶ Η δύναμη της δράσης έχει το ίδιο μέτρο και αντίθετη κατεύθυνση από τη δύναμη της αντίδρασης.

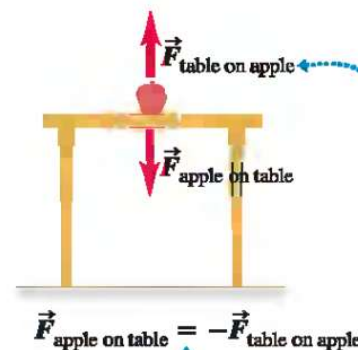
- ▶ Η μία από τις δυνάμεις είναι η δράση, και η άλλη είναι η αντίδραση.
- ▶ Δεν έχει σημασία ποια δύναμη χαρακτηρίζεται ως δράση και ποια ως αντίδραση.
- ▶ Η δράση και η αντίδραση ασκούνται σε διαφορετικά σώματα και πρέπει να είναι του ίδιου τύπου.



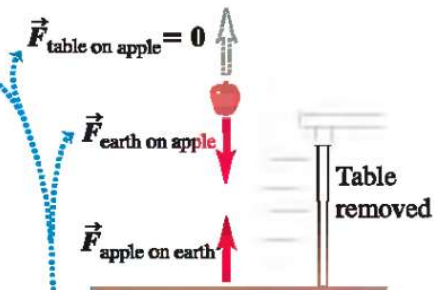
# NOMOI Newton



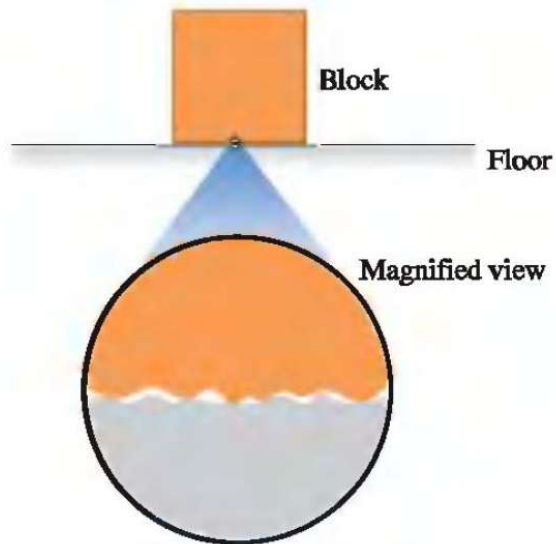
Δράση αντίδραση εμφανίζονται πάντα σε ζεύγος και αποδίδονται στην αμοιβαία αλληλεπίδραση δύο διαφορετικών σωμάτων



Οι δύο δυνάμεις στο μήλο δεν αποτελούν δράση/αντίδραση, επειδή ασκούνται στο ίδιο σώμα. Εάν αφαιρέσουμε τη μια η άλλη παραμένει...



# ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΤΡΙΒΗΣ



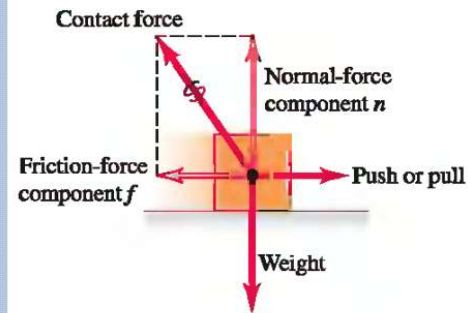
On a microscopic level, even smooth surfaces are rough; they tend to catch and cling.

## ΤΡΙΒΗ ΟΛΙΣΘΗΣΗΣ


$$f_k = \mu_k n$$

Συντελεστής τριβής ολίσθησης

The friction and normal forces are really components of a single contact force.



**ΙΣΧΥΕΙ ΠΑΝΤΑ**


$$\mu_k < \mu_s$$

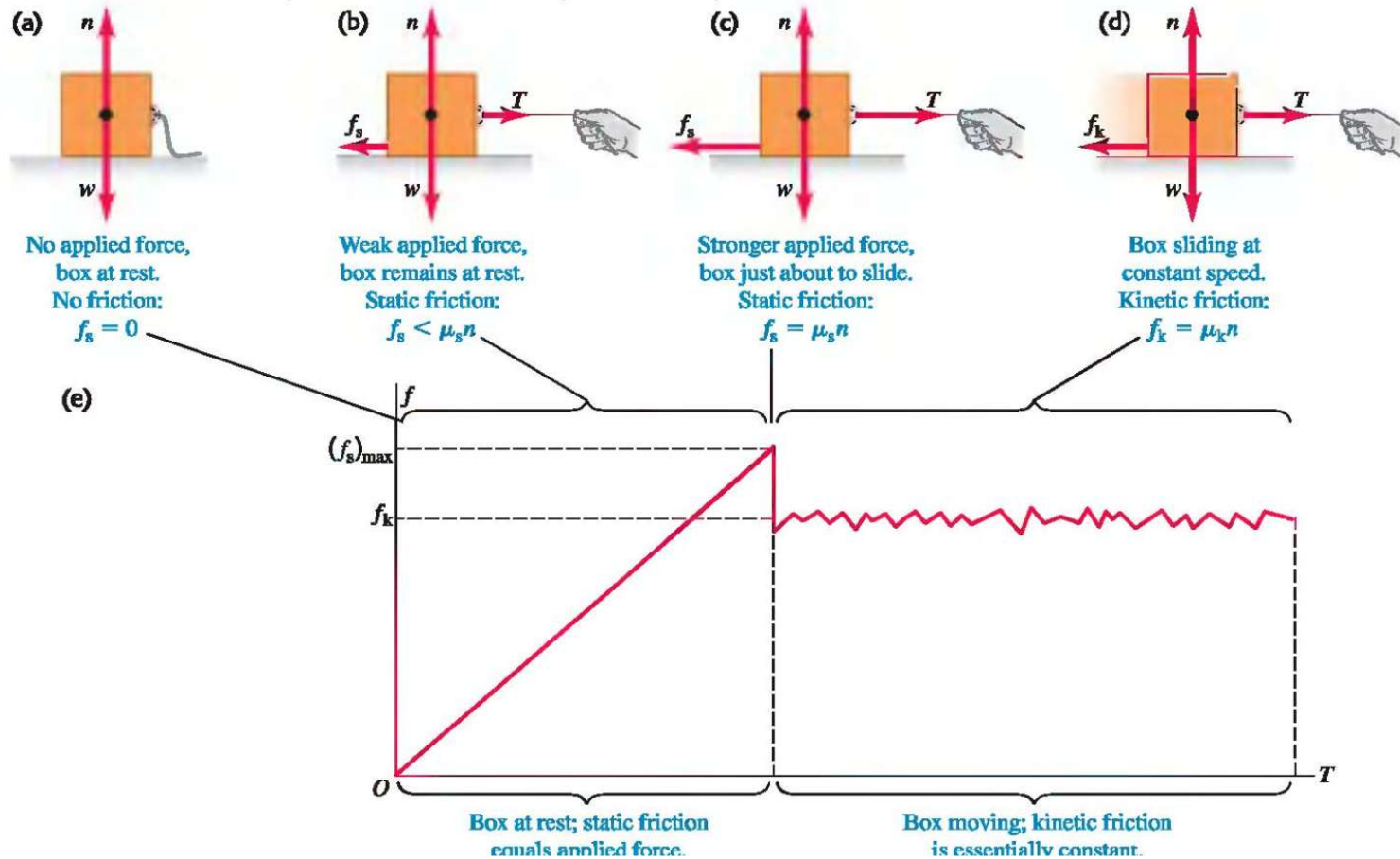
## ΣΤΑΤΙΚΗ ΤΡΙΒΗ

$$f_s \leq \mu_s n$$

Συντελεστής στατικής τριβής

# ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΤΡΙΒΗΣ

Τι γίνεται όταν προσπαθούμε να σπρώξουμε ένα αντικείμενο το οποίο ακουμπά πάνω σε μια επιφάνεια




# ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΤΡΙΒΗΣ

Μερικές τιμές των συντελεστών τριβής για την περίπτωση διαφορετικών διεπιφανειών

Materials	Coefficient of Static Friction, $\mu_s$	Coefficient of Kinetic Friction, $\mu_k$
Steel on steel	0.74	0.57
Aluminum on steel	0.61	0.47
Copper on steel	0.53	0.36
Brass on steel	0.51	0.44
Zinc on cast iron	0.85	0.21
Copper on cast iron	1.05	0.29
Glass on glass	0.94	0.40
Copper on glass	0.68	0.53
Teflon on Teflon	0.04	0.04
Teflon on steel	0.04	0.04
Rubber on concrete (dry)	1.0	0.8
Rubber on concrete (wet)	0.30	0.25

μπρούτζος

χυτοσίδηρος



**ΓΕΝΙΚΑ ΙΣΧΥΕΙ: ΑΕΡΙΑ < ΥΓΡΑ < ΣΤΕΡΑΙΑ**

**ΕΡΓΟ - ΕΝΕΡΓΕΙΑ**

# Σύστημα και Έργο

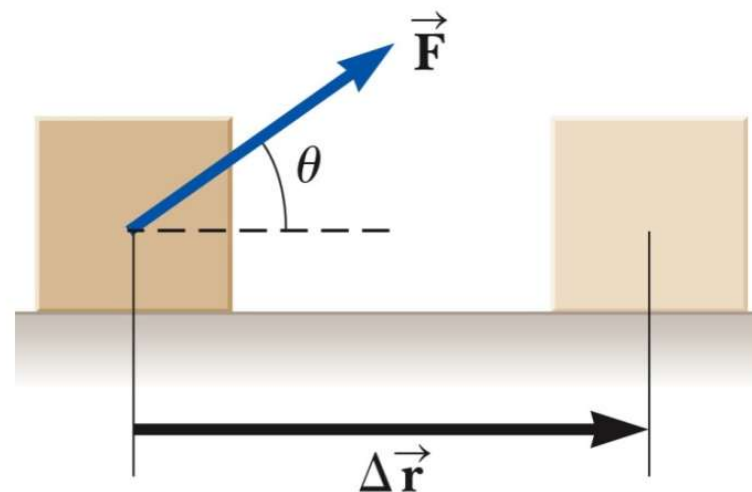
• Το *σύστημα* είναι ένα μικρό κομμάτι του σύμπαντος: (i) ένα σώμα ή σωματίδιο, (ii) σύνολο σωμάτων ή σωματιδίων, (iii) μια περιοχή του χώρου, (iv) μπορεί να μεταβάλλει το μέγεθος και το σχήμα του ως προς τον χρόνο.

– Το **έργο**  $W$  το οποίο παράγει σε ένα σύστημα ένας παράγοντας που ασκεί **μια σταθερή δύναμη** σε αυτό είναι το εσωτερικό γινόμενο της δύναμης  $\vec{F}$  επί την μετατόπιση  $\Delta\vec{r}$  του σημείου εφαρμογής της δύναμης:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} \rightarrow W = |\vec{F}| |\Delta\vec{r}| \cos \theta$$

όπου  $\theta$  είναι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων της δύναμης και της μετατόπισης.

**ΚΛΕΙΣΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ:** σύστημα το οποίο δεν ανταλλάσσει μάζα με το περιβάλλον και η συνολική δύναμη που ασκείται από το περιβάλλον σε αυτό είναι μηδέν



Το έργο παράγεται **από** κάποιο τμήμα του περιβάλλοντος που αλληλεπιδρά απευθείας με το σύστημα.

Το έργο παράγεται **στο** σύστημα.

Η μετατόπιση αναφέρεται στο σημείο εφαρμογής της δύναμης.

Η δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα δεν παράγει έργο αν το σώμα δεν υφίσταται μετατόπιση.



# ΕΡΓΟ σταθερής δύναμης

ΠΡΟΣΟΧΗ είναι εσωτερικό γινόμενο

## ΕΡΓΟ σταθερής Δύναμης

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

Μονάδα μέτρησης  
JOULE = Nm

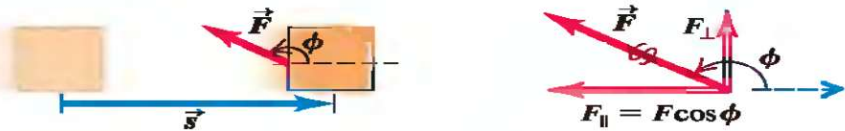
$$W = F s \cos \vartheta$$

(a)



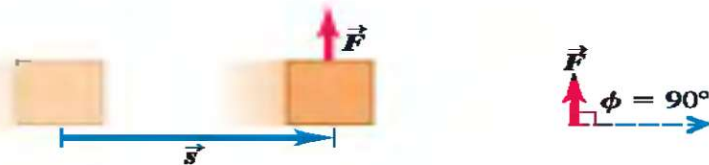
Η δύναμη διαθέτει συνιστώσα στη διεύθυνση της μετατόπισης:  
- Το έργο της δύναμης είναι θετικό  
-  $W = (F \cos \varphi) s$

(b)



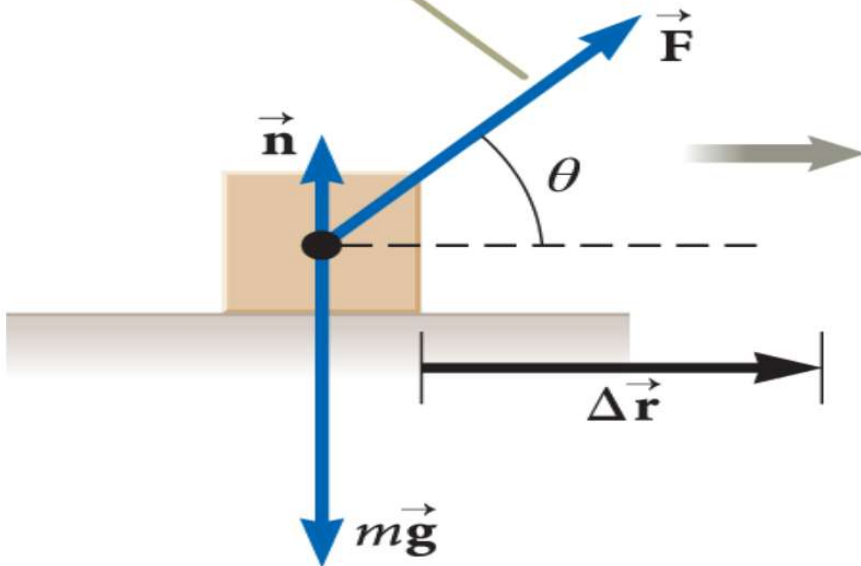
Η δύναμη διαθέτει συνιστώσα αντίθετα στη διεύθυνση της μετατόπισης:  
- Το έργο της δύναμης είναι αρνητικό  
-  $W = (F \cos \varphi) s$   
-  $90^\circ < \varphi < 270^\circ$

(c)



Η δύναμη ασκείται κάθετα στη μετατόπιση:  
- Δεν υπάρχει έργο της δύναμης στη μετατόπιση του σώματος  
- Γενικότερα εάν μια δύναμη διαθέτει συνιστώσα κάθετη στη μετατόπιση του σώματος τότε αυτή η συνιστώσα δεν παράγει έργο

Η  $\vec{F}$  είναι η μόνη δύναμη η οποία παράγει έργο στον κύβο.



Η κάθετη δύναμη και η βαρυτική δύναμη δεν παράγουν έργο στο σώμα.

$$\cos \theta = \cos 90^\circ = 0$$

Η δύναμη  $\vec{F}$  είναι η μοναδική δύναμη που παράγει έργο στο σώμα

▶ Το πρόσημο του έργου εξαρτάται από την κατεύθυνση της δύναμης σε σχέση με τη μετατόπιση.

- ▶ Το έργο είναι θετικό όταν η προβολή της  $\vec{F}$  στο  $\Delta\vec{r}$  έχει ίδια κατεύθυνση με τη μετατόπιση.
- ▶ Το έργο είναι αρνητικό όταν η προβολή έχει κατεύθυνση αντίθετη από αυτή της μετατόπισης.
- ▶ Το έργο είναι μηδέν όταν  $\vec{F} \perp \Delta\vec{r}$

▶ Το έργο είναι βαθμωτό μέγεθος.

▶ Η μονάδα μέτρησης του έργου είναι το joule (J).

- ▶ 1 joule = 1 newton · 1 meter =  $\text{kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^2$
- ▶  $\text{J} = \text{N} \cdot \text{m}$

▶ Αν το έργο που παράγεται σε ένα σύστημα είναι θετικό, η ενέργεια μεταφέρεται προς το σύστημα.

▶ Αν το έργο που παράγεται στο σύστημα είναι αρνητικό, η ενέργεια μεταφέρεται από το σύστημα.

▶ Το αποτέλεσμα είναι η μεταβολή της ενέργειας που είναι αποθηκευμένη στο σύστημα.

# ΕΡΓΟ

## ΕΡΓΟ μη σταθερής Δύναμης

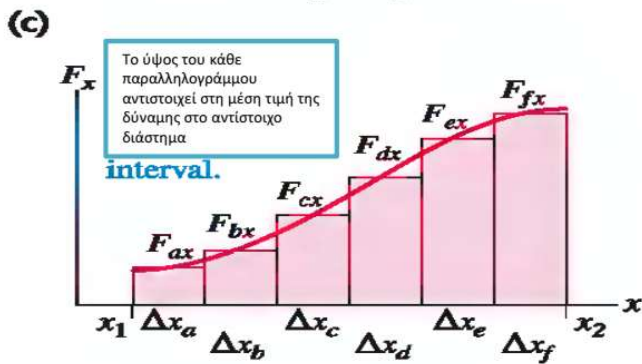
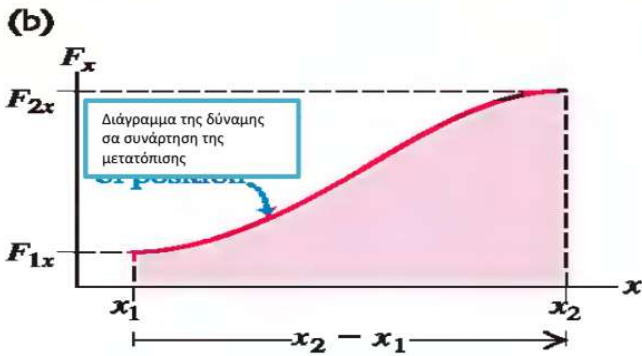
(a) Το σώμα κινείται από το  $x_1$  στο  $x_2$  από μια μεταβλητή δύναμη στη διεύθυνση  $x$ .



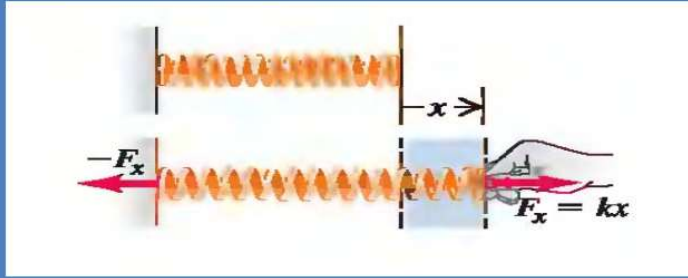
$$W = F_{ax}\Delta x_a + F_{bx}\Delta x_b + \dots = \sum F(x)\Delta x$$

Μαθηματικά για  $\Delta x \rightarrow 0$

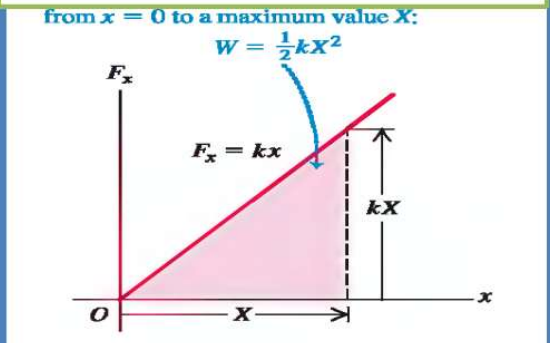
$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx$$



## Παράδειγμα



Το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη αντιστοιχεί στο έργο της δύναμης καθώς το ελατήριο παραμορφώνεται από  $x=0$  σε μια μέγιστη τιμή  $X$



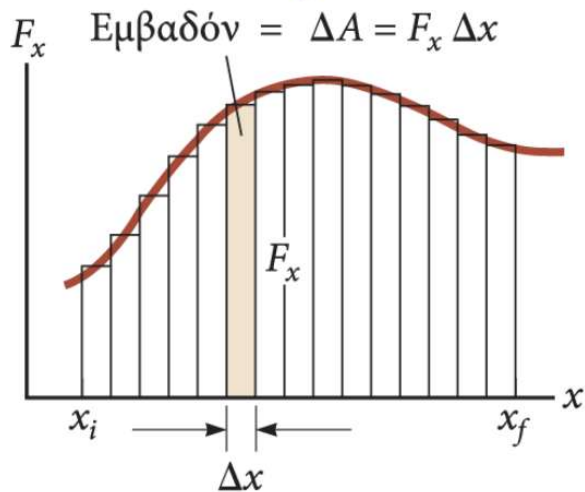
Νόμος Hooke  $F=kx$

$$W = \int_0^X F_x dx = \int_0^X kx dx = \frac{1}{2}kX^2$$

## Έργο μεταβαλλόμενης δύναμης

## Έργο πολλών δυνάμεων

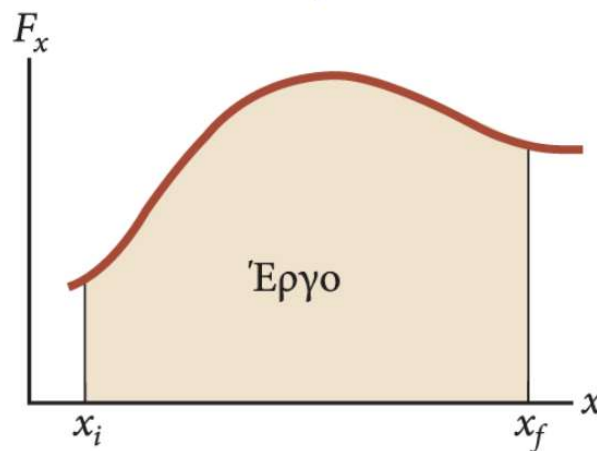
Το συνολικό έργο που παράγεται κατά τη μετατόπιση από το  $x_i$  στο  $x_f$  είναι κατά προσέγγιση ίσο με το άθροισμα των εμβαδών όλων των ορθογωνίων.



α

$$W \approx \sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x$$

Το έργο που παράγει η συνιστώσα  $F_x$  της μεταβλητής δύναμης καθώς μετακινεί το σωματίδιο από το  $x_i$  στο  $x_f$  είναι ακριβώς ίσο με το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη.



β

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$$

Το συνολικό έργο που παράγεται στο σύστημα είναι το έργο που παράγει η συνισταμένη δύναμη.

$$\sum W = W_{\text{εξωτ.}} = \int_{x_i}^{x_f} (\sum F_x) dx$$

Στη γενική περίπτωση μιας συνισταμένης δύναμης με μεταβαλλόμενο μέτρο και κατεύθυνση,

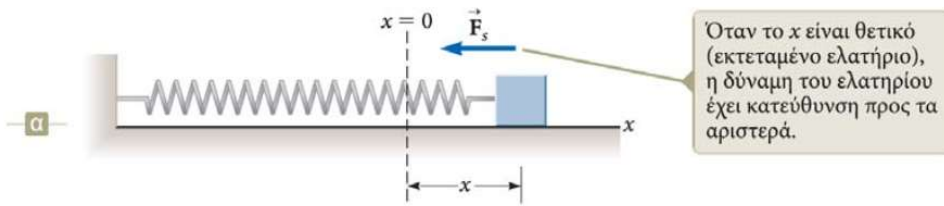
$$\sum W = W_{\text{εξωτ.}} = \int (\sum \vec{F}) \cdot d\vec{r}$$

Ή ισοδύναμα το συνολικό έργο είναι ίσο με το αλγεβρικό άθροισμα του έργου που παράγει κάθε δύναμη χωριστά.

$$\sum W = W_{\text{εξωτ.}} = \sum_{\text{δυνάμεις}} \left( \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \right)$$

# Δύναμη και έργο που παράγεται από ελατήριο

## Νόμος του Hooke



Όταν το  $x$  είναι θετικό (εκτεταμένο ελατήριο), η δύναμη του ελατηρίου έχει κατεύθυνση προς τα αριστερά.

$$\vec{F}_s = F_x \hat{i} = -kx \hat{i}$$

Το  $x$  είναι η θέση του κύβου σε σχέση με τη θέση ισορροπίας ( $x = 0$ )  
 Το  $k$  ονομάζεται σταθερά του ελατηρίου.  
 Το  $k$  μετράει τη σκληρότητα του ελατηρίου.

Όταν το  $x > 0$  (το ελατήριο έχει εκταθεί),  $F < 0$

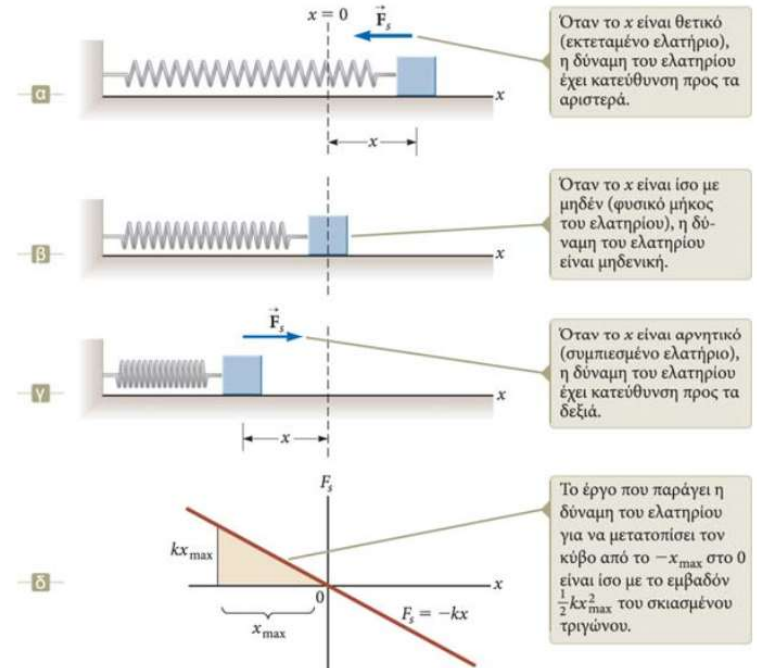
Όταν το  $x = 0$  (στη θέση ισορροπίας),  $F = 0$ .

Όταν το  $x < 0$  (το ελατήριο έχει συμπιεστεί),  $F > 0$ .

Το έργο που παράγει η δύναμη για να μετατοπίσει τον κύβο από το σημείο  $x_i = -x_{\max}$  στο  $x_f = 0$

Το συνολικό έργο που παράγει η δύναμη για να μετατοπίσει τον κύβο από το σημείο  $-x_{\max}$  στο  $x_{\max}$  είναι ίσο με μηδέν!

## Έργο που παράγεται από ελατήριο



Όταν το  $x$  είναι θετικό (εκτεταμένο ελατήριο), η δύναμη του ελατηρίου έχει κατεύθυνση προς τα αριστερά.

Όταν το  $x$  είναι ίσο με μηδέν (φυσικό μήκος του ελατηρίου), η δύναμη του ελατηρίου είναι μηδενική.

Όταν το  $x$  είναι αρνητικό (συμπιεσμένο ελατήριο), η δύναμη του ελατηρίου έχει κατεύθυνση προς τα δεξιά.

Το έργο που παράγει η δύναμη του ελατηρίου για να μετατοπίσει τον κύβο από το  $-x_{\max}$  στο 0 είναι ίσο με το εμβαδόν  $\frac{1}{2} kx_{\max}^2$  του σκιασμένου τριγώνου.



$$W_s = \int \vec{F}_s \cdot d\vec{r} = \int_{x_i}^{x_f} (-kx \hat{i}) \cdot (dx \hat{i})$$

$$= \int_{-x_{\max}}^0 (-kx) dx = \frac{1}{2} kx_{\max}^2$$

## Έργο δύναμης ελατηρίου

▶ Ας υποθέσουμε ότι ο κύβος υφίσταται τυχαία μετατόπιση από το  $x = x_i$  στο  $x = x_f$ .

▶ Το έργο που παράγει η δύναμη του ελατηρίου για να μετατοπίσει τον κύβο είναι

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} (-kx) dx = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$$

▶ Αν η κίνηση τελειώνει στο σημείο από το οποίο άρχισε, τότε  $W = 0$ .

▶ Ας υποθέσουμε ότι ένας εξωτερικός παράγοντας  $F_{\text{ασκ.}}$  τεντώνει το ελατήριο.

▶ Η ασκούμενη δύναμη έχει ίδιο μέτρο και αντίθετη κατεύθυνση από τη δύναμη του ελατηρίου.

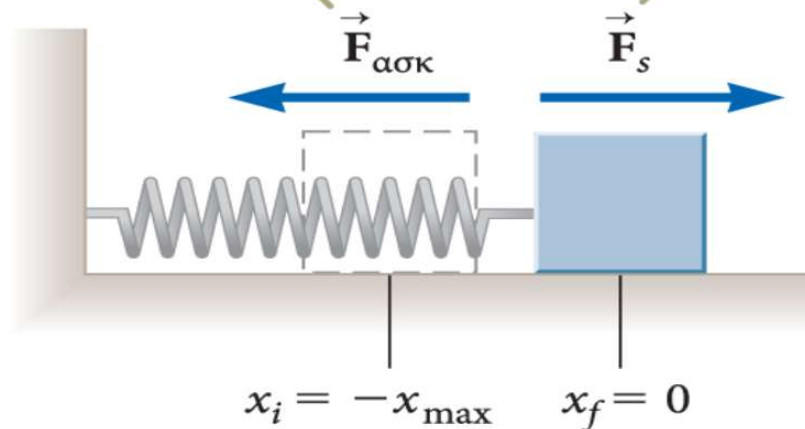
$$\vec{F}_{\text{ασκ.}} = F_{\text{ασκ.}} \hat{i} = -\vec{F}_s = -(-kx\hat{i}) = kx\hat{i}$$

▶ Το έργο που παράγει η  $F_{\text{ασκ.}}$  για να μετατοπίσει τον κύβο από το σημείο  $-x_{\text{max}}$  στο  $x = 0$  ισούται με  $-\frac{1}{2}kx_{\text{max}}^2$

▶ Για οποιαδήποτε μετατόπιση, το έργο που παράγει η ασκούμενη δύναμη είναι

## Έργο ασκούμενης δύναμης

Αν η μετακίνηση του κύβου γίνεται πολύ αργά, τότε η ασκούμενη δύναμη  $\vec{F}_{\text{ασκ}}$  έχει ίδιο μέτρο και αντίθετη κατεύθυνση από τη δύναμη του ελατηρίου  $\vec{F}_s$  σε κάθε χρονική στιγμή.



$$W_{\text{ασκ.}} = \int_{x_i}^{x_f} (kx) dx = \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2$$

# Ελαστική δυναμική ενέργεια

Η **ελαστική δυναμική ενέργεια** σχετίζεται με τα ελατήρια.

Το έργο που παράγεται από μια εξωτερική ασκούμενη δύναμη σε ένα σύστημα ελατηρίου-κύβου είναι:

$$W = \frac{1}{2} kx_f^2 - \frac{1}{2} kx_i^2$$

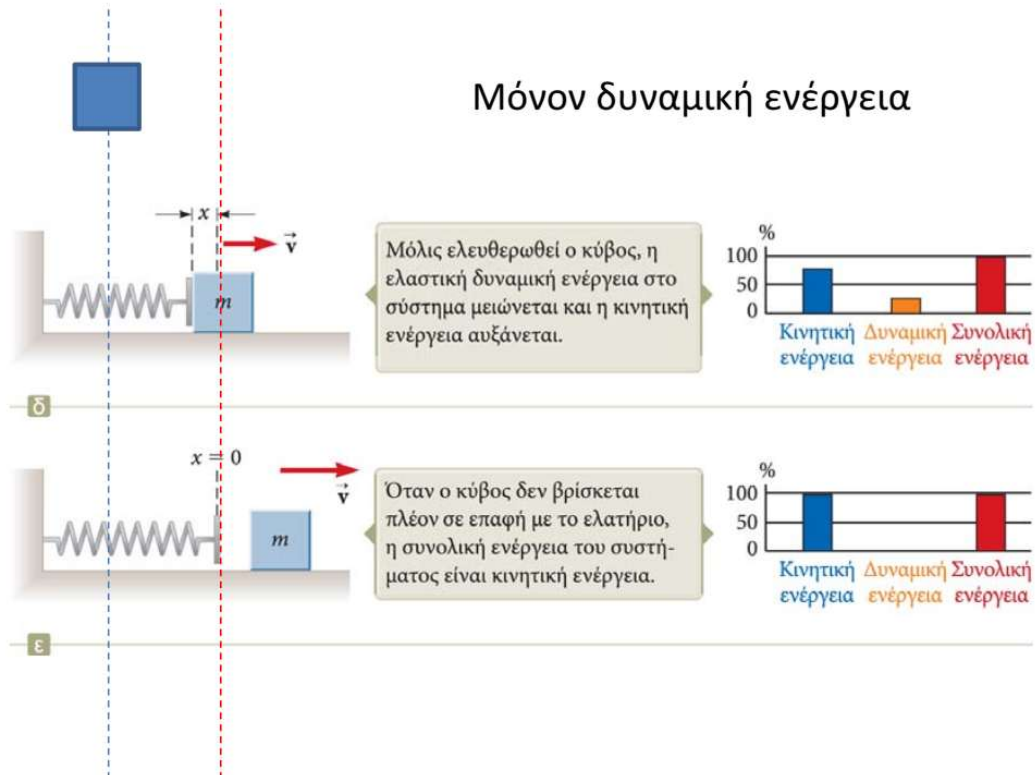
με:

$U_s = \frac{1}{2} kx^2$  η ελαστική δυναμική ενέργεια.

η ελαστική δυναμική ενέργεια είναι η αποθηκευμένη ενέργεια στο παραμορφωμένο ελατήριο (αποθηκεύεται στο ελατήριο μόνο όταν το ελατήριο έχει εκταθεί ή έχει συμπιεστεί).

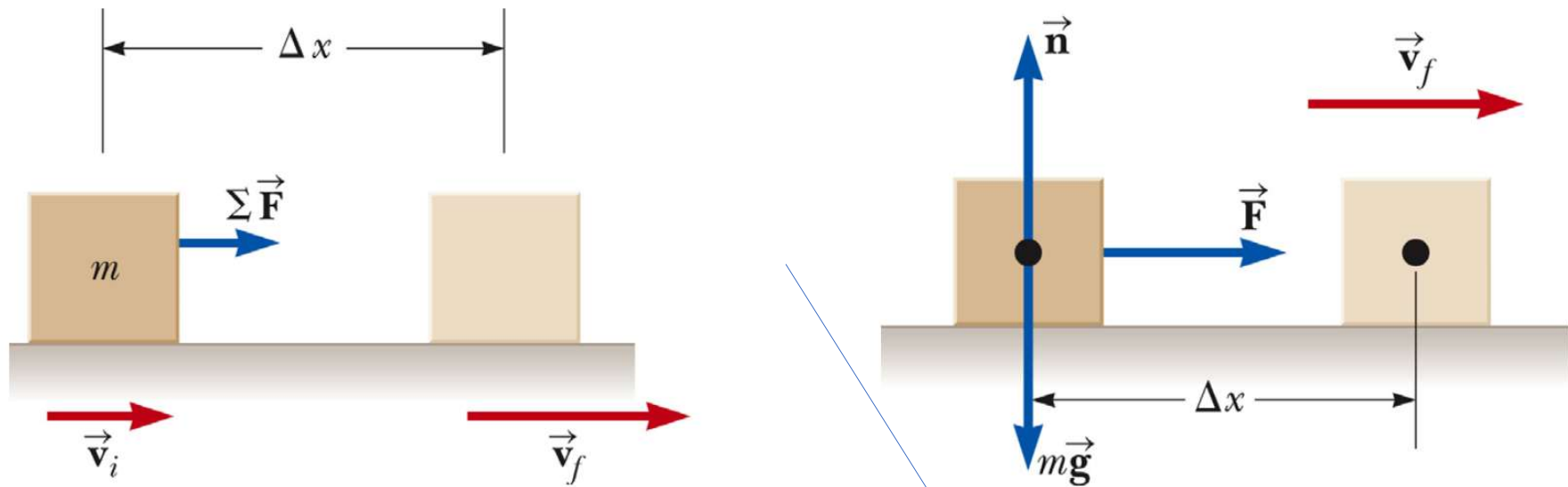
Η ελαστική δυναμική ενέργεια είναι πάντα θετική και μηδέν όταν το ελατήριο δεν είναι παραμορφωμένο.

Η αποθηκευμένη δυναμική ενέργεια μπορεί να μετατραπεί σε κινητική ενέργεια.



# Κινητική ενέργεια & έργο

Μια πιθανή επίπτωση του έργου που παράγεται για να μεταφερθεί ενέργεια προς ένα σύστημα είναι η μεταβολή της κινητικής ενέργειάς του



$$W_{\text{εξωτ.}} = \int_{x_i}^{x_f} \sum F dx = \int_{x_i}^{x_f} m\alpha dx \rightarrow W_{\text{εξωτ.}} = \int_{v_i}^{v_f} m v dv \quad W_{\text{εξωτ.}} = \Delta K = \frac{1}{2} m v_f^2 - 0$$

$$W_{\text{εξωτ.}} = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 \rightarrow W_{\text{εξωτ.}} = K_f - K_i = \Delta K$$



# Θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας

- Θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας,

$$W_{\text{εξωτ.}} = K_f - K_i = \Delta K$$

•Όταν παράγεται έργο σε ένα σύστημα και η μόνη μεταβολή στο σύστημα σχετίζεται με το μέτρο της ταχύτητάς του, το συνολικό έργο που παράγεται στο σύστημα ισούται με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος.

- Το μέτρο της ταχύτητας του συστήματος αυξάνεται αν το συνολικό έργο που παράγεται σε αυτό είναι θετικό.
- Το μέτρο της ταχύτητας του συστήματος μειώνεται αν το συνολικό έργο είναι αρνητικό.

•Το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας δεν ισχύει όταν δεν μεταβάλλεται μόνο το μέτρο της ταχύτητας στο σύστημα ή όταν υπάρχουν άλλες αλληλεπιδράσεις με το περιβάλλον εκτός από το έργο.

•Το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας αναφέρεται στο μέτρο της ταχύτητας (speed) του συστήματος και όχι στην ταχύτητά του (velocity).

# Βαρυτική δυναμική ενέργεια

Παράγουμε έργο στο σύστημα ανυψώνοντας κατακόρυφα το βιβλίο.  
Η μετατόπιση του βιβλίου είναι:

$$\Delta \vec{r} = (y_f - y_i) \hat{j}$$

Το έργο που παράγεται στο σύστημα εκδηλώνεται ως αύξηση της ενέργειας του συστήματος.

$$W_{\text{εξωτ.}} = (\vec{F}_{\text{ασκ.}}) \cdot \Delta \vec{r}$$

$$W_{\text{εξωτ.}} = (m g \hat{j}) \cdot [(y_f - y_i) \hat{j}]$$

$$W_{\text{εξωτ.}} = m g y_f - m g y_i$$

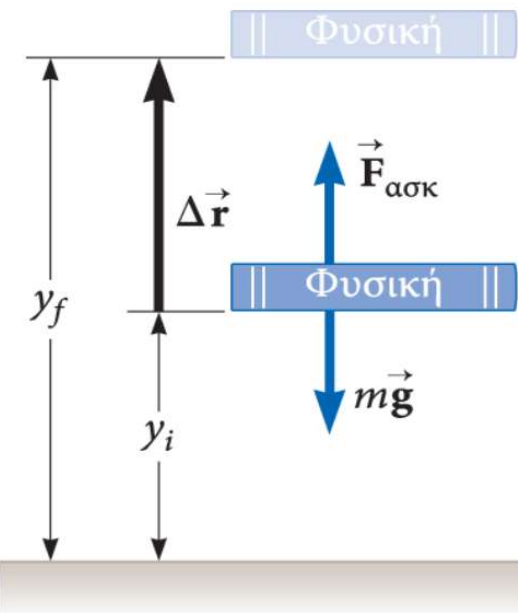
Ο μηχανισμός αποθήκευσης ενέργειας ονομάζεται *δυναμική ενέργεια*.

Η **βαρυτική δυναμική ενέργεια** είναι η ενέργεια που έχει ένα σώμα σε μια δεδομένη θέση πάνω από την επιφάνεια της Γης.

$U_g = m g y$  (J), βαθμωτό μέγεθος

Το έργο που παράγεται μπορεί να μεταβάλλει τη βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος:  $W_{\text{εξωτ.}} = \Delta U_g$

Το έργο που παράγει ο εξωτερικός παράγοντας στο σύστημα βιβλίου-Γης είναι  $m g y_f - m g y_i$ .



# Δύο κοινές μορφές δυναμικής ενέργειας

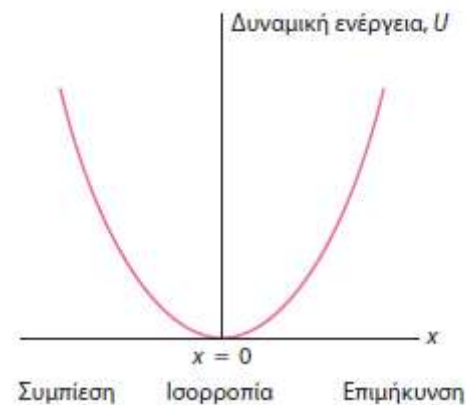
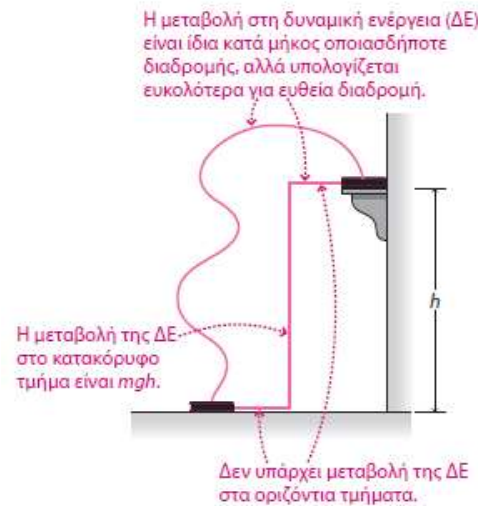
- Η **βαρυτική δυναμική ενέργεια** αποθηκεύει το έργο που παράγεται κόντρα στη βαρύτητα:

$$\Delta U = mg\Delta y$$

- Η βαρυτική δυναμική ενέργεια αυξάνεται γραμμικά με το ύψος  $y$
- Αυτό αντικατοπτρίζει τη **σταθερή** βαρυτική δύναμη κοντά στην επιφάνεια της Γης
- Η **ελαστική δυναμική ενέργεια** αποθηκεύει το έργο που παράγεται κατά την επιμήκυνση ή τη συμπίεση ενός ελατηρίου ή άλλων ελαστικών συστημάτων:

$$U = \frac{1}{2} kx^2$$

- Η ελαστική δυναμική ενέργεια αυξάνεται **τετραγωνικά** με την επιμήκυνση ή συμπίεση  $x$
- Αυτό αντικατοπτρίζει τη **γραμμική αύξηση** της δύναμης του ελατηρίου



# Συντηρητικές και μη Συντηρητικές δυνάμεις

- Το έργο που παράγει μια συντηρητική δύναμη σε ένα σωματίδιο, το οποίο κινείται μεταξύ δύο οποιωνδήποτε σημείων, (i) είναι ανεξάρτητο από την τροχιά που ακολουθεί το σωματίδιο και (ii) μηδενικό όταν η τροχιά είναι κλειστή. (Βαρύτητα, δύναμη ελατηρίου).
- Οι μη συντηρητικές δυνάμεις δεν ικανοποιούν τις ιδιότητες των συντηρητικών δυνάμεων (τριβή).
- Οι μη συντηρητικές δυνάμεις που δρουν μέσα σε ένα σύστημα προκαλούν μεταβολή στη μηχανική ενέργεια του συστήματος.

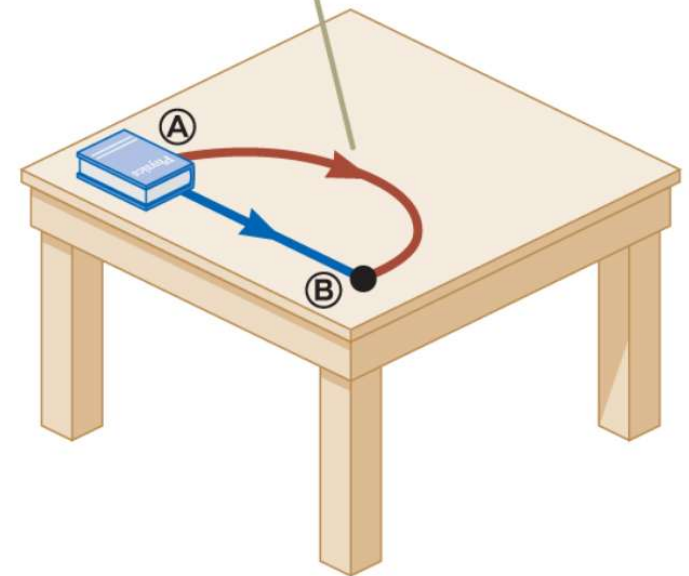
$$E_{\text{μηχ.}} = K + U$$

Το  $K$  περιλαμβάνει την κινητική ενέργεια όλων των κινούμενων στοιχείων του συστήματος.

Το  $U$  περιλαμβάνει όλους τους τύπους δυναμικής ενέργειας του συστήματος

- Επειδή το έργο που παράγεται στο βιβλίο εξαρτάται από τη διαδρομή, η τριβή είναι μια μη συντηρητική δύναμη.

Το έργο που παράγεται κατά τη μετατόπιση του βιβλίου είναι μεγαλύτερο στην καφέ διαδρομή από ό,τι στην μπλε διαδρομή.



# Συντηρητικές δυνάμεις και δυναμική ενέργεια

• Μπορούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση δυναμικής ενέργειας  $U$  σύμφωνα με την οποία, το έργο που παράγεται από μια συντηρητική δύναμη ισούται με τη μείωση της δυναμικής ενέργειας του συστήματος.

• Το έργο που παράγει μια τέτοια δύναμη  $F$  είναι

$$W_{\text{εσωτ.}} = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx = -\Delta U$$

– Η μεταβολή  $\Delta U$  είναι αρνητική όταν οι  $F$  και  $dx$  έχουν την ίδια κατεύθυνση.

– Η συντηρητική δύναμη συνδέεται με τη συνάρτηση δυναμικής ενέργειας μέσω της σχέσης

$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

– Η συνιστώσα  $x$  μιας συντηρητικής δύναμης που ασκείται σε ένα σώμα μέσα σε ένα σύστημα ισούται με την αρνητική παράγωγο της δυναμικής ενέργειας του συστήματος ως προς  $x$ .

– Παράδειγμα:

$$F_s = -\frac{dU_s}{dx} = -\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} kx^2 \right) = -kx$$

# ΕΝΕΡΓΕΙΑ

## Δυναμική ενέργεια

Ενέργεια που διαθέτει ένα σώμα λόγω της θέσης που έχει μέσα σε ένα πεδίο δυνάμεων (π.χ. βαρυτικό, ελαστικής παραμόρφωσης, ηλεκτρικό κλπ)

$$U = W_{\vec{B}} = \vec{B} \cdot \vec{s} = m \vec{g} \cdot \vec{s} = mgh$$

$$U = W_k = \frac{1}{2} kx^2$$

$$U = W_e = k_{\eta\lambda} \frac{q_1 q_2}{r}$$

## Θεώρημα διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας

Κατά τη μετατροπή της δυναμικής σε κινητική ενέργεια (ή το αντίστροφο) η Μηχανική ενέργεια διατηρείται σταθερή εφόσον δεν παρατηρείται μετατροπή ενέργειας σε άλλη μορφή

# ΕΝΕΡΓΕΙΑ

**Θεώρημα διατήρησης της Ενέργειας**

**Η ολική ενέργεια ενός κλειστού συστήματος σωμάτων διατηρείται σταθερή**

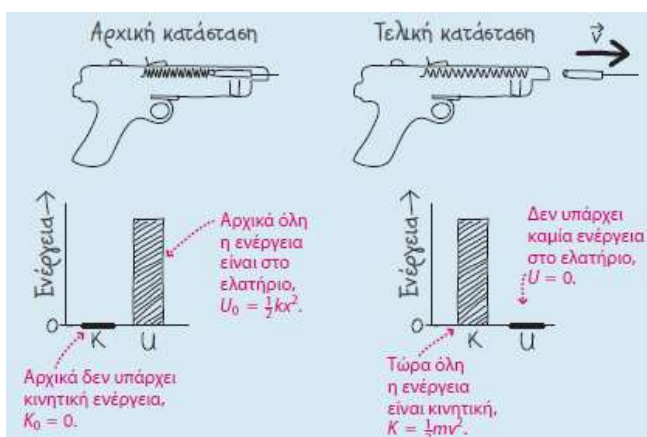
# Επίλυση προβλημάτων που αφορούν τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας

- **Ερμηνεύστε** το πρόβλημα για να βεβαιωθείτε ότι όλες οι δυνάμεις διατηρητικές, επομένως η μηχανική ενέργεια διατηρείται. Προσδιορίσετε την ποσότητα που ζητά το πρόβλημα, η οποία μπορεί να είναι η ίδια η ενέργεια ή μια άλλη σχετική ποσότητα
- **Αναπτύξτε** το σχέδιό σας για την επίλυση του προβλήματος σχεδιάζοντας το σώμα σε μια κατάσταση στην οποία μπορείτε να προσδιορίσετε τόσο την κινητική όσο και τη δυναμική ενέργεια και στη συνέχεια στην κατάσταση στην οποία μία ποσότητα είναι άγνωστη. Σχεδιάστε επίσης απλά ραβδογράμματα που υποδεικνύουν τα σχετικά μεγέθη των ποικίλων μορφών ενέργειας
  - Γράψτε την εξίσωση  $K + U = K_0 + U_0$
- **Υπολογίστε** για να επιλύσετε για την άγνωστη ποσότητα, η οποία μπορεί να είναι κάποια ενέργεια, η επιμήκυνση ενός ελατηρίου, η ταχύτητα κ.λπ.
- **Αξιολογήστε** τη λύση σας για να διαπιστώσετε ότι η απάντησή σας είναι λογική, ότι περιλαμβάνει τις κατάλληλες μονάδες και ότι είναι σύμφωνη με τα ραβδογράματά σας



# Παραδείγματα

- Ένα πιστόλι ελατηρίου με βέλη
  - Ποια είναι η ταχύτητα του βέλους;

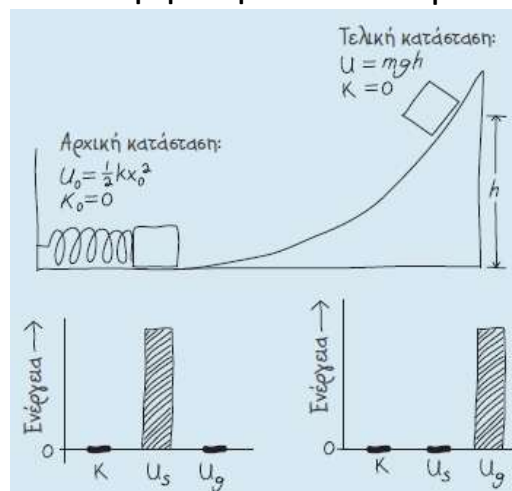


- $K + U = K_0 + U_0$  γίνεται

$$\frac{1}{2}mv^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}kx^2$$

- Επομένως,  $v = \sqrt{k/m}x$  όπου  $x$  είναι η αρχική συμπίεση του ελατηρίου

- Ένα ελατήριο και η βαρύτητα
  - Πόσο ψηλά φτάνει το κιβώτιο;



- $K + U = K_0 + U_0$  γίνεται

$$0 + mgh = 0 + \frac{1}{2}kx^2$$

- Επομένως  $h = \frac{kx^2}{2mg}$

## Διαγράμματα ενέργειας και ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας

• Η θέση  $x = 0$  είναι θέση **ευσταθούς ισορροπίας**.

– Οποιαδήποτε μετατόπιση μακριά από τη συγκεκριμένη θέση προκαλεί μια δύναμη με κατεύθυνση προς τη θέση  $x = 0$ .

• Οι διατάξεις ευσταθούς ισορροπίας αντιστοιχούν στις θέσεις εκείνες για τις οποίες η  $U(x)$  έχει ελάχιστη τιμή.

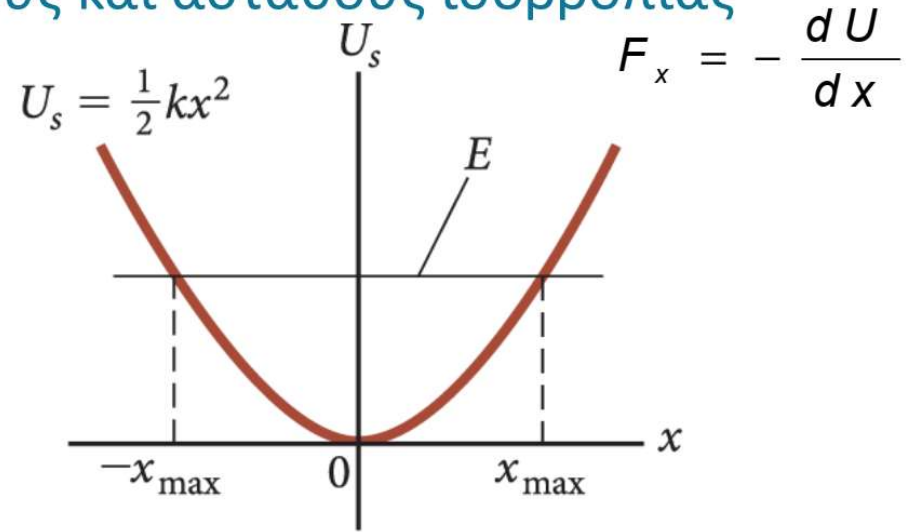
• Τα σημεία  $x = x_{\max}$  και  $x = -x_{\max}$  είναι τα σημεία αλλαγής κατεύθυνσης.

▶ Στη θέση  $x = 0$ ,  $F_x = 0$ , άρα το σωματίδιο βρίσκεται σε ισορροπία.

▶ Για οποιαδήποτε άλλη τιμή του  $x$ , το σωματίδιο απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας.

▶ Αυτό είναι ένα παράδειγμα **ασταθούς ισορροπίας**.

▶ Οι διατάξεις ασταθούς ισορροπίας αντιστοιχούν σε εκείνες τις θέσεις για τις οποίες η  $U(x)$  έχει μέγιστη τιμή.



α

