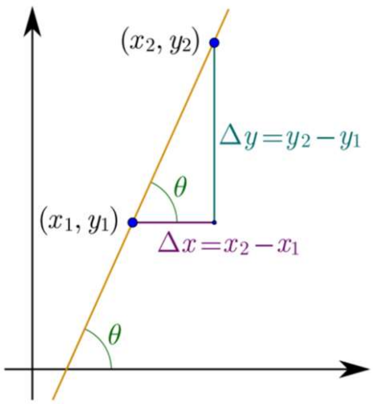
Παράγωγος (derivative)



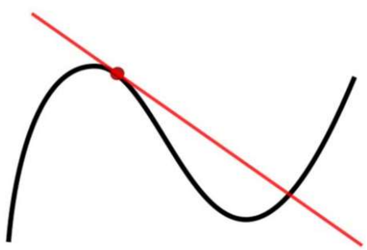
$\tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ Όταν Δx→0, Δy→0

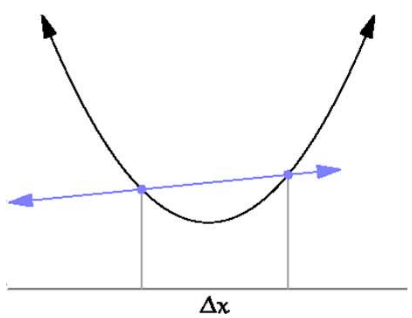
y=f(x)=ax+b (ευθεία)

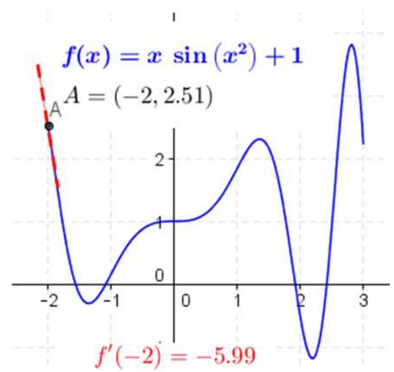
$$\tan\theta = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

Παράγωγος της συνάρτησης f

Πρακτικά δηλώνει την **κλίση της συνάρτησης f σε καθένα σημείο x**
Εάν x→t, χρόνος τότε: Ρυθμός μεταβολής







$f(x)=x^n$	$f'(x)=nx^{n-1}$
g(x)=a f(x) a:constant	g'(x)=a f'(x)
h(x)=f(x)+g(x)	h'(x)=f'(x)+g'(x)
h(x)=f(x) g(x)	h'(x)=f'(x)g(x)+ f(x)g'(x)
g(x)=1/f(x)	$g'(x)=[-1/f(x)^2]f'(x)$

https://en.wikipedia.org/wiki/Derivative

Modeling growth rates

ΔN(t)/Δt = Γ-Θ = r N(t)

Γ ο αριθμός των γεννήσεων = γN(t)

Θ ο αριθμός των θανάτων = θN(t) → **Γ-Θ** = γN(t)-θN(t)=**r N(t)**

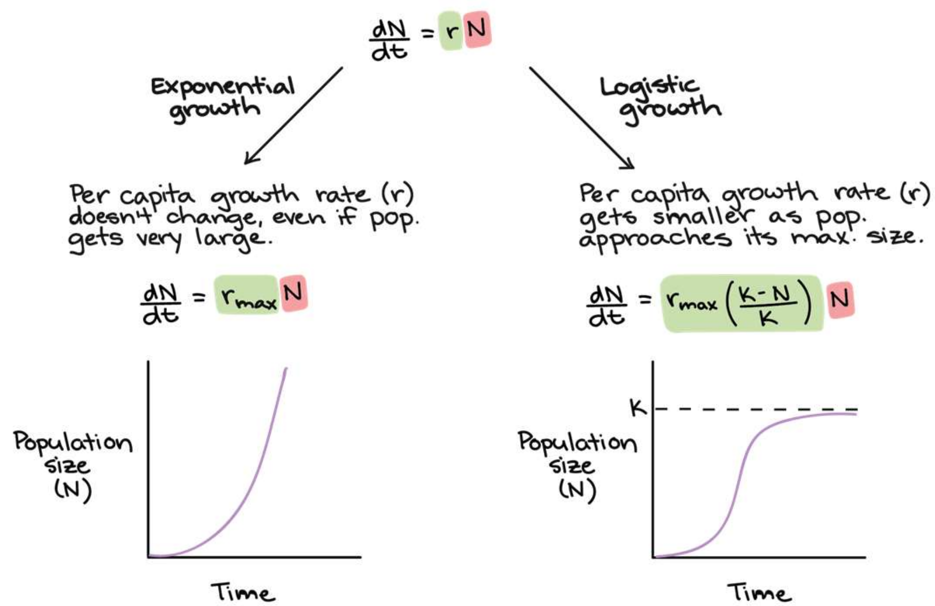
N(t) ο πληθυσμός μια ορισμένη χρονική στιγμή t

r ο ρυθμός αύξησης για κάθε **ένα** οργανισμό

Συνήθως θέλουμε να γνωρίζουμε το ρυθμό αύξησης σε **συγκεκριμένη χρονική στιγμή**!

dN/dt = rN

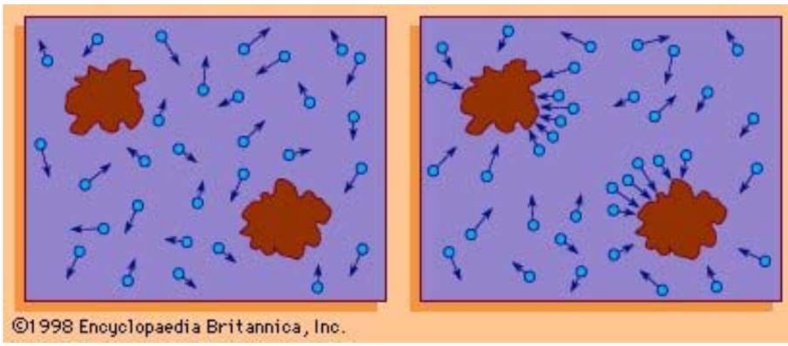
Εκθετική αύξηση



ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ

Η Κινητική ή Κινηματική είναι κλάδος της μηχανικής που περιγράφει την κίνηση των σωμάτων αδιαφορώντας για τη μάζα τους ή τις αιτίες, δυνάμεις, που προκαλούν την κίνησή τους.

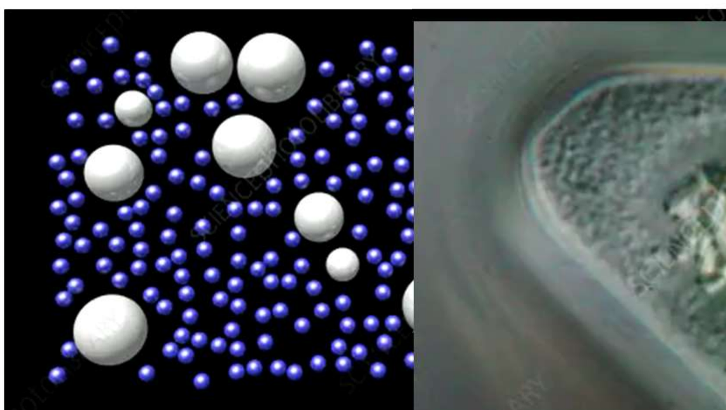
Κίνηση Brown

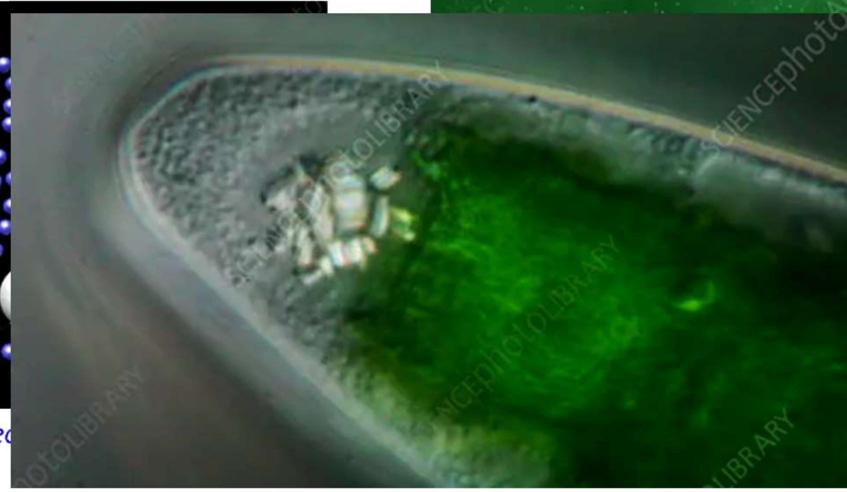


Random Walk

$\langle \Delta \mathrm{x} \rangle \propto t^{1/2}$

$D = \frac{kT}{6\pi\eta R}$, σε 3D





https://www.sciencephoto.com/mec
motion-animation

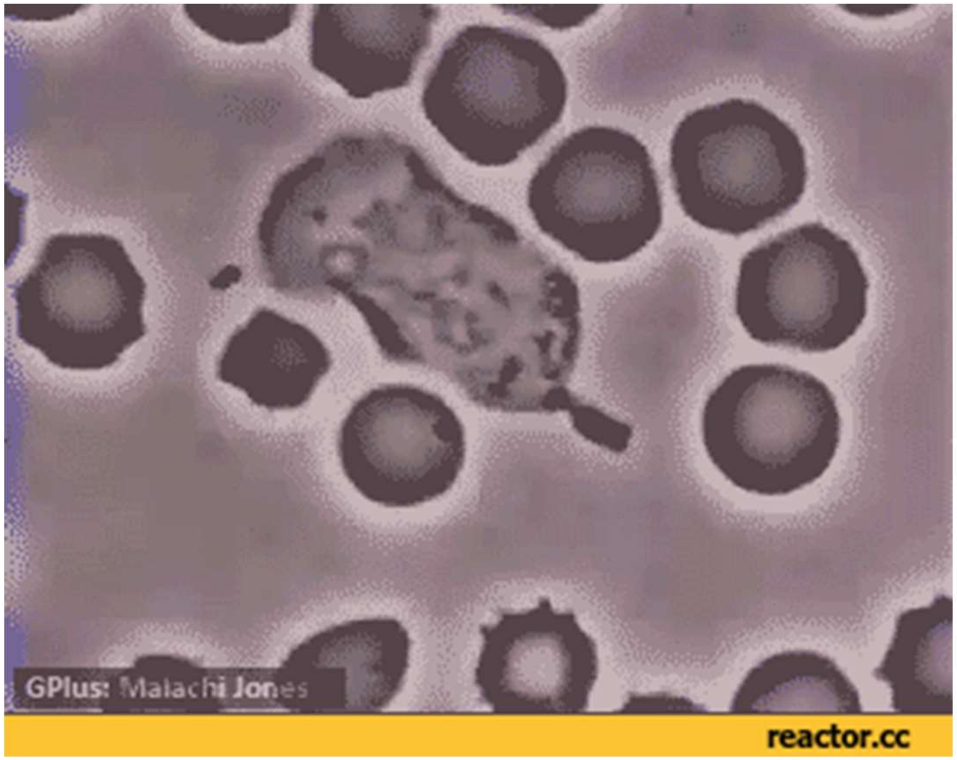
edia/237006/view/brownian-motion

Αποστολή στον Άρη

https://dlmultimedia.esa.int/download/public/videos/2016/02/043/1602_043_AR_EN.mp4

ESA

Κίνηση μονοκύτταρων οργανισμών



https://giphy.com/gifs/cell-animation-34RXqfbRIdT0I

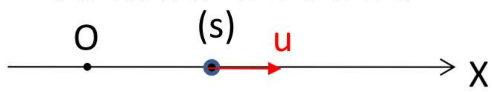
Διάφοροι άλλοι μικροοργανισμοί ή κίνηση των οποίων καταγράφηκε με οπτικό μικροσκόπιο

https://www.nikonsmallworld.com/galleries/2020-small-world-in-motion-competition/a-marine-tardigrade-batillipes-lusitanus

A marine tardigrade (Batillipes lusitanus) | 2020 Small World in Motion Competition | Nikon's Small World (nikonsmallworld.com)

ΚΙΝΗΣΗ ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ

ΤΑΧΥΤΗΤΑ – ευθύγραμμη ομαλή κίνηση



u=σταθ, σε ίσους χρόνους → ίσα διαστήματα

Η ταχύτητα στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση ορίζεται ως
(ειδική περίπτωση της u=ds/dt):

$$u = \frac{s(t) - s_o}{t} \Leftrightarrow s(t) = s_o + ut$$

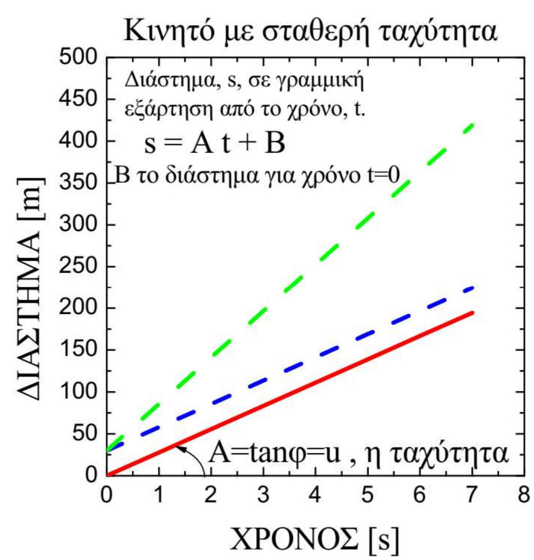
όπου s_o το αρχικό διάστημα για t=0
s το διάστημα που διανύει το κινητό σε χρόνο t

$$u = \frac{s}{t}$$

Μονάδες: [SI] → **m/s,** Km/h, miles/h, cm/s

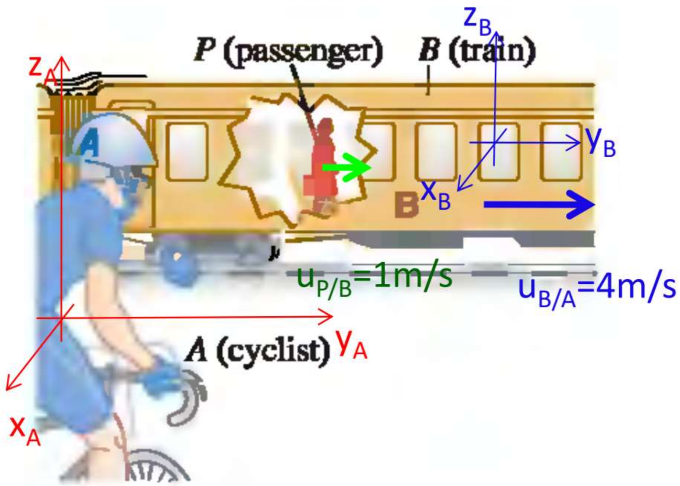
Παράδειγμα $100\frac{km}{h} = 100 \cdot \frac{1000m}{3600s} = 27.78m/s$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ του s vs t → **s=s(t)**



Ποια η διαφορά για τα κινητά των οποίων το διάστημα σα συνάρτηση του χρόνου απεικονίζεται με κόκκινη, πράσινη και μπλε καμπύλη;

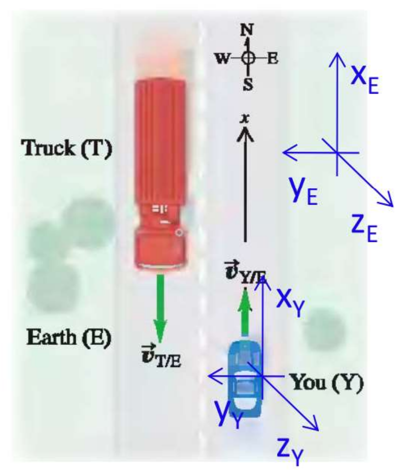
ΣΧΕΤΙΚΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ (1D) – ευθ. ομ. κίν.



A→ Ποδηλάτης – αδρανειακό σύστημα A
B→ Τρένο – αδρανειακό σύστημα B, $u_{B/A}$=4m/s ως προς A
P→ Επιβάτης $u_{P/B}$=1m/s ως προς B
Ποια η ταχύτητα του P ως προς A, $u_{P/A}$;

ΠΡΟΣΟΧΗ: οι ταχύτητες είναι διανυσματικά μεγέθη. Επειδή το πρόβλημα είναι **<u>μονοδιάστατο</u>** αρκούν οι αλγεβρικές τιμές της ταχύτητας ($u_{B/A}$ >0, $u_{P/B}$>0).
Το + προέρχεται από το πρόβλημα δηλαδή οι ταχύτητες είναι ομόρροπες άρα προστίθενται.

$$\boxed{u_{P/A} = u_{P/B} + u_{B/A}}$$



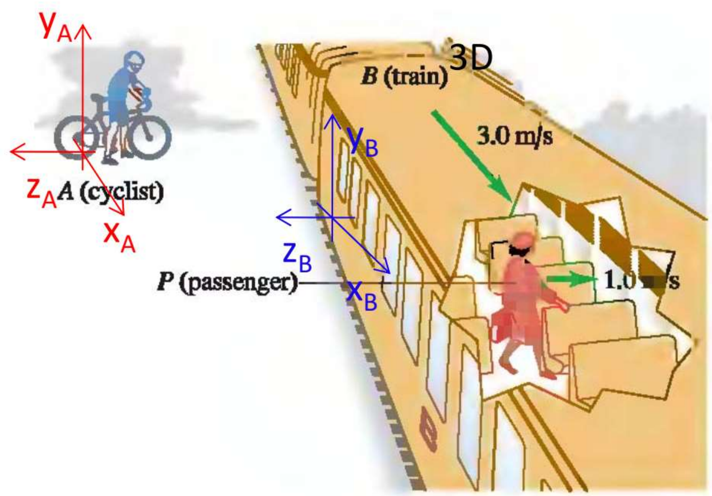
$$u_{T/E} = -104km/h$$

$$u_{Y/E} = +88km/h$$

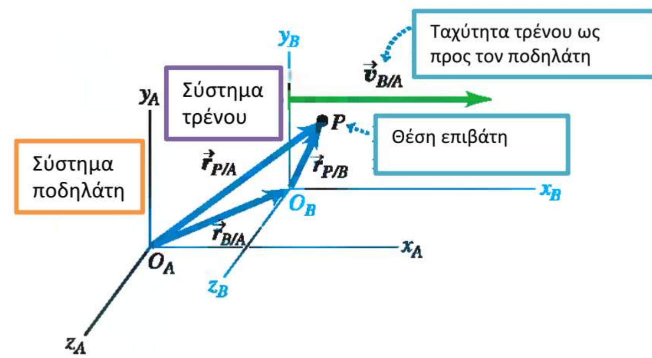
$u_{T/E} = u_{T/Y} + u_{Y/E}$

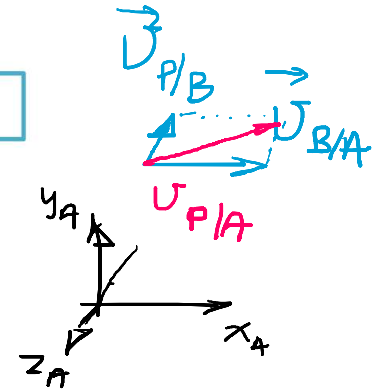
$$\boxed{u_{T/Y} = u_{T/E} - u_{Y/E}}$$

ΣΧΕΤΙΚΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ (3D) – ευθ. ομ. κίν.

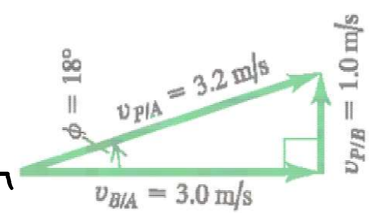


ΘΕΣΕΙΣ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ

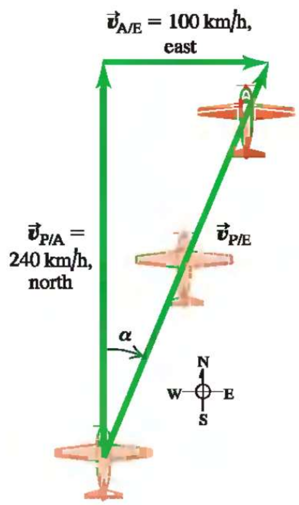




ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΤΑΧΥΤΗΤΩΝ



ΕΝΑ ΑΚΟΜΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

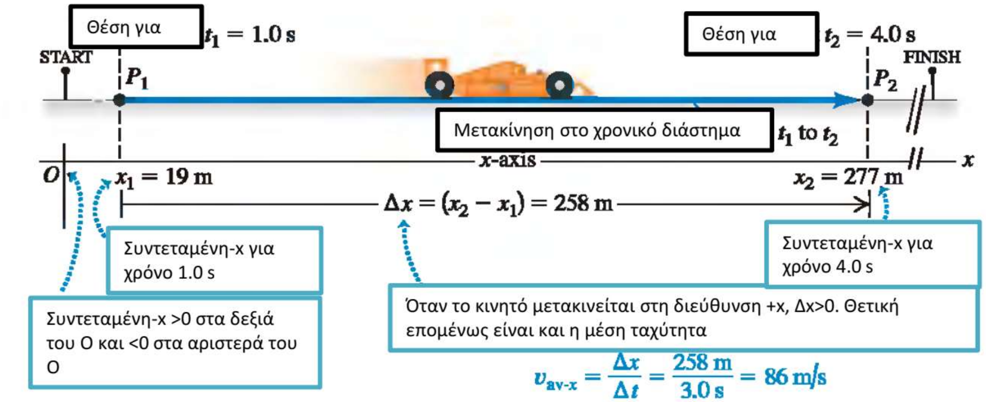


$$\boxed{\mathbf{u}_{P/E} = \mathbf{u}_{P/A} + \mathbf{u}_{A/E}}$$

μέτρο $u_{P/E} = \sqrt{u_{P/A}^2 + u_{A/E}^2} = 260\ m/s$

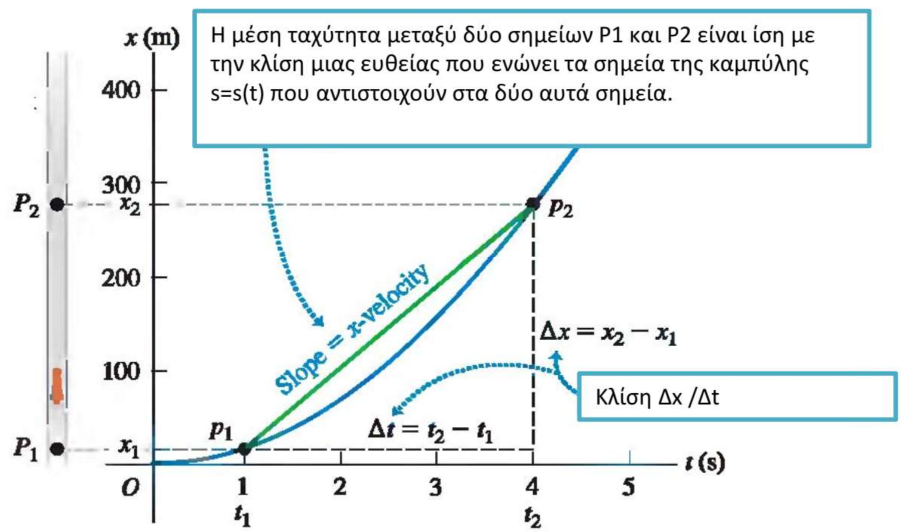
$$\tan a = \frac{u_{A/E}}{u_{P/A}} = \frac{100}{240} \rightarrow a = \operatorname{atan}\frac{100}{240} = 22.6^{\circ}$$

ΤΑΧΥΤΗΤΑ – ευθύγραμμα επιταχυνόμενη κίνηση



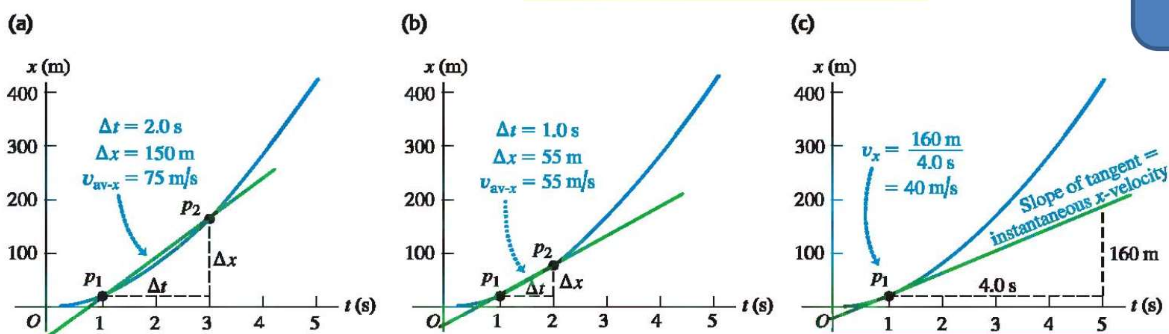
Μέση ταχύτητα

$$u_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$



ΤΑΧΥΤΗΤΑ – ευθύγραμμα επιταχυνόμενη κίνηση

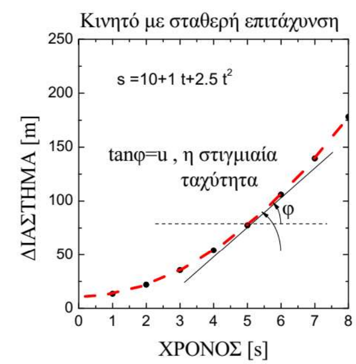
Στιγμιαία ταχύτητα $v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$ ⟸ ΓΕΝΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ



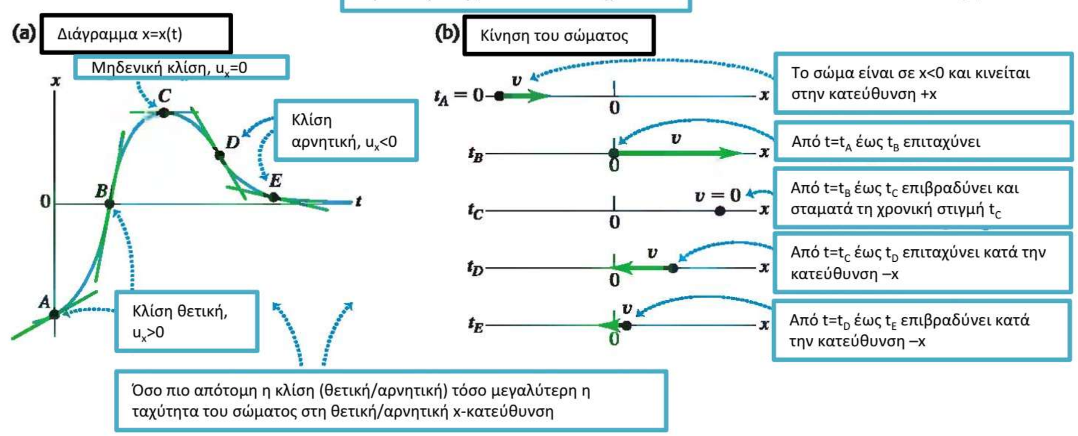
Όσο η μέση ταχύτητα υπολογίζεται για μικρότερα χρονικά διαστήματα…

…η τιμή της $u_{av}=\Delta x/\Delta y$ πλησιάζει την ταχύτητα στο σημείο p1

Η στιγμιαία ταχύτητα u_x σε κάθε σημείο x είναι ίση με την κλίση της εφαπτομένης σε αυτό το σημείο



Σε μια πιο πολύπλοκη κίνηση πώς μπορώ να εκτιμήσω τη στιγμιαία ταχύτητα εάν έχω το <u>διάγραμμα κίνησης</u> (x=x(t));

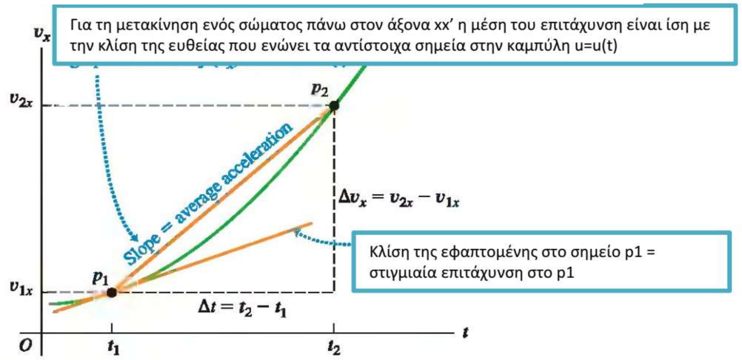


ΤΑΧΥΤΗΤΑ – ευθύγραμμα επιταχυνόμενη κίνηση

Μέση επιτάχυνση $a_{av\text{-}x} = \dfrac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta v_x}{\Delta t}$

Στιγμιαία επιτάχυνση

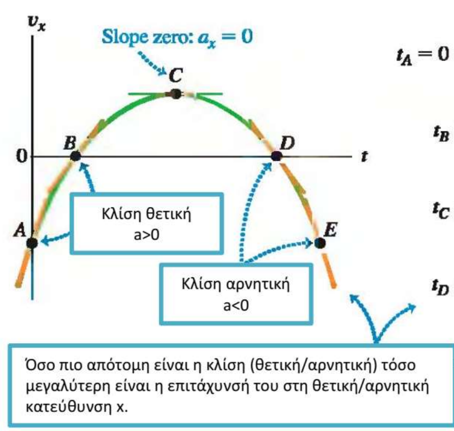
ΓΕΝΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ $\Rightarrow$ $a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta v_x}{\Delta t} = \dfrac{dv_x}{dt}$

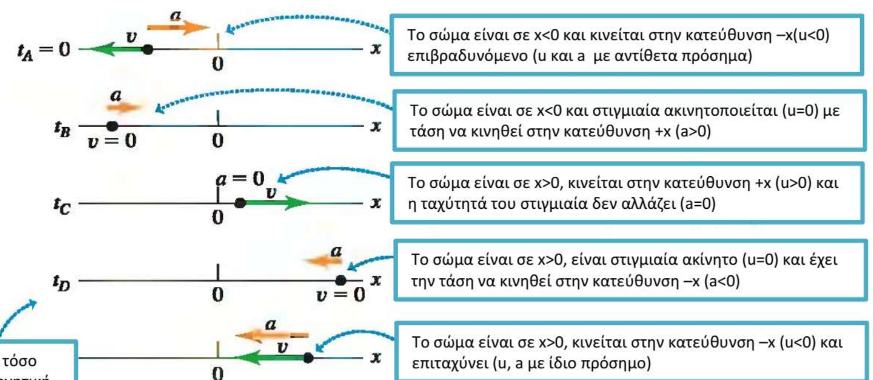


(a) Διάγραμμα u=u(t)

(b) Θέση, ταχύτητα και επιτάχυνση

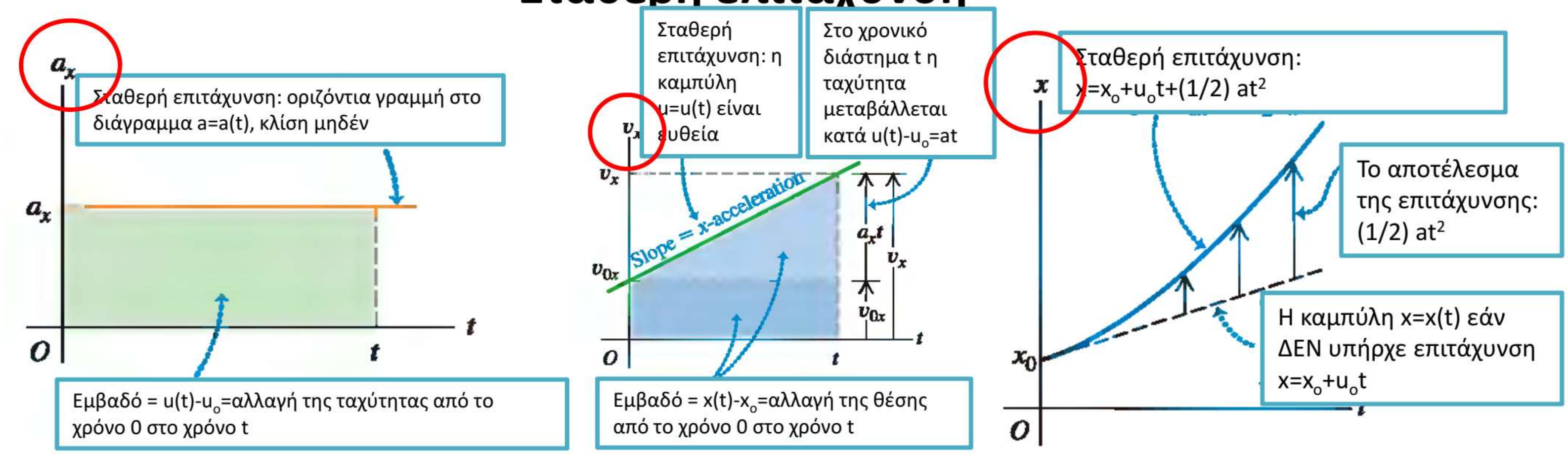
Σε μια πιο πολύπλοκη κίνηση πώς μπορώ να εκτιμήσω τη στιγμιαία επιτάχυνση εάν έχω το διάγραμμα u=u(t);





Ευθύγραμμα ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση

Σταθερή επιτάχυνση

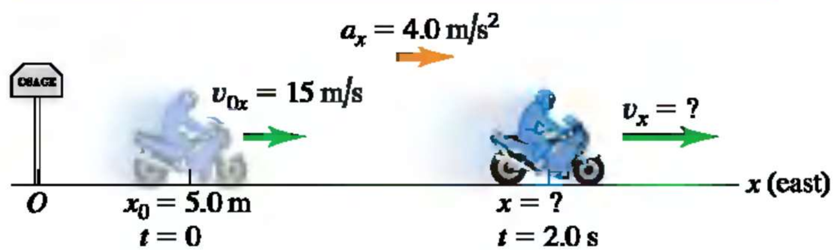


$$a_x = \frac{du}{dt} \Rightarrow du = a_x dt \Rightarrow \int_{u_{ox}}^{u_x} du = \int_0^t a_x dt \Rightarrow u_x - u_{ox} = a_x t$$

$$u_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = u_x dt \Rightarrow \int_{x_o}^{x} x = \int_0^t u_x dt \Rightarrow x - x_o = \int_0^t (u_{ox} + a_x t) dt \Rightarrow x - x_o = u_{ox} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

Οι γνωστοί σας τύποι...

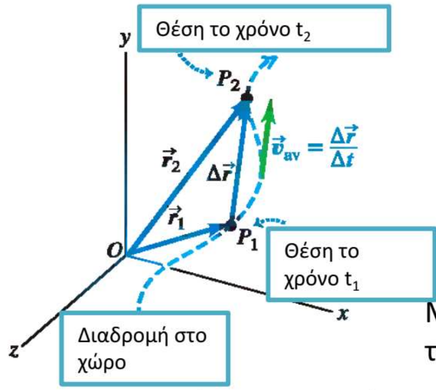
Μηχανή κινείται με σταθερή επιτάχυνση



$$x = 43m$$

$$u_x = 23m/s$$

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΑ – ΧΩΡΟΣ 3D



Θέση κινητού στο χώρο

P=P(t)

P→ $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$

Παραμετρικές εξισώσεις κίνησης

x=x(t)
y=y(t)
z=z(t)

Μέση ταχύτητα $\vec{v}_{av} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$

Στιγμιαία ταχύτητα $\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

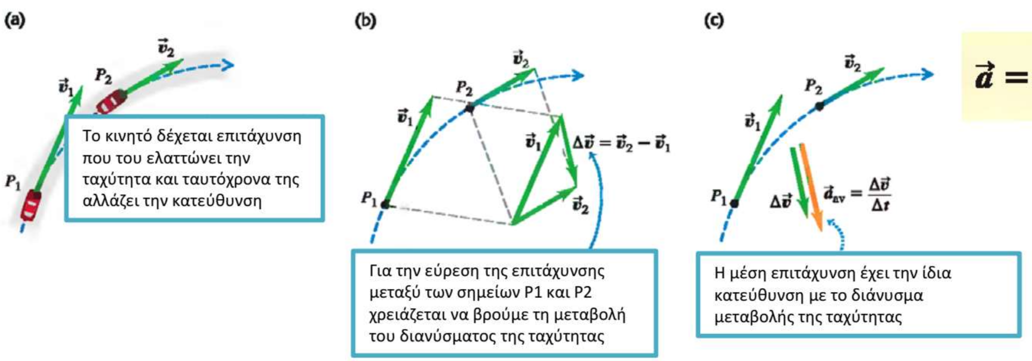
Συνιστώσες και μέτρο ταχύτητας

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt}$$

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$$

2D $u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$ $\quad \tan \vartheta = \frac{u_y}{u_x}$

$$\vec{a}_{av} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

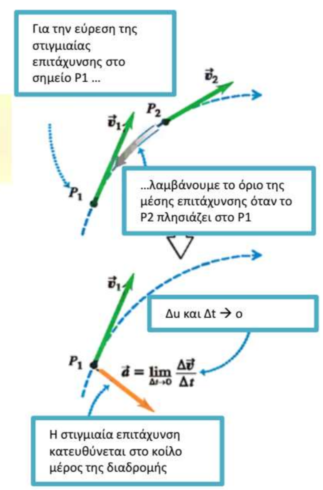


$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

2D

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

$$\tan \vartheta = \frac{a_y}{a_x}$$



2. (α) Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του πίνακα που ακολουθεί, να σχεδιάσετε το διάγραμμα θέσης-χρόνου λαμβάνοντας υπόψη τις μετρήσεις μόνο για τις χρονικές στιγμές $t = 0$, 4 και 8 s. Υπολογίστε την ταχύτητα για καθένα από τα χρονικά διαστήματα [0,4] και [4,8], και δείξτε στη συνέχεια ότι η μέση τιμή της επιτάχυνσης είναι μηδέν.

t (s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x (m)	1	7,25	9	7,75	5	2,25	1	2,75	9

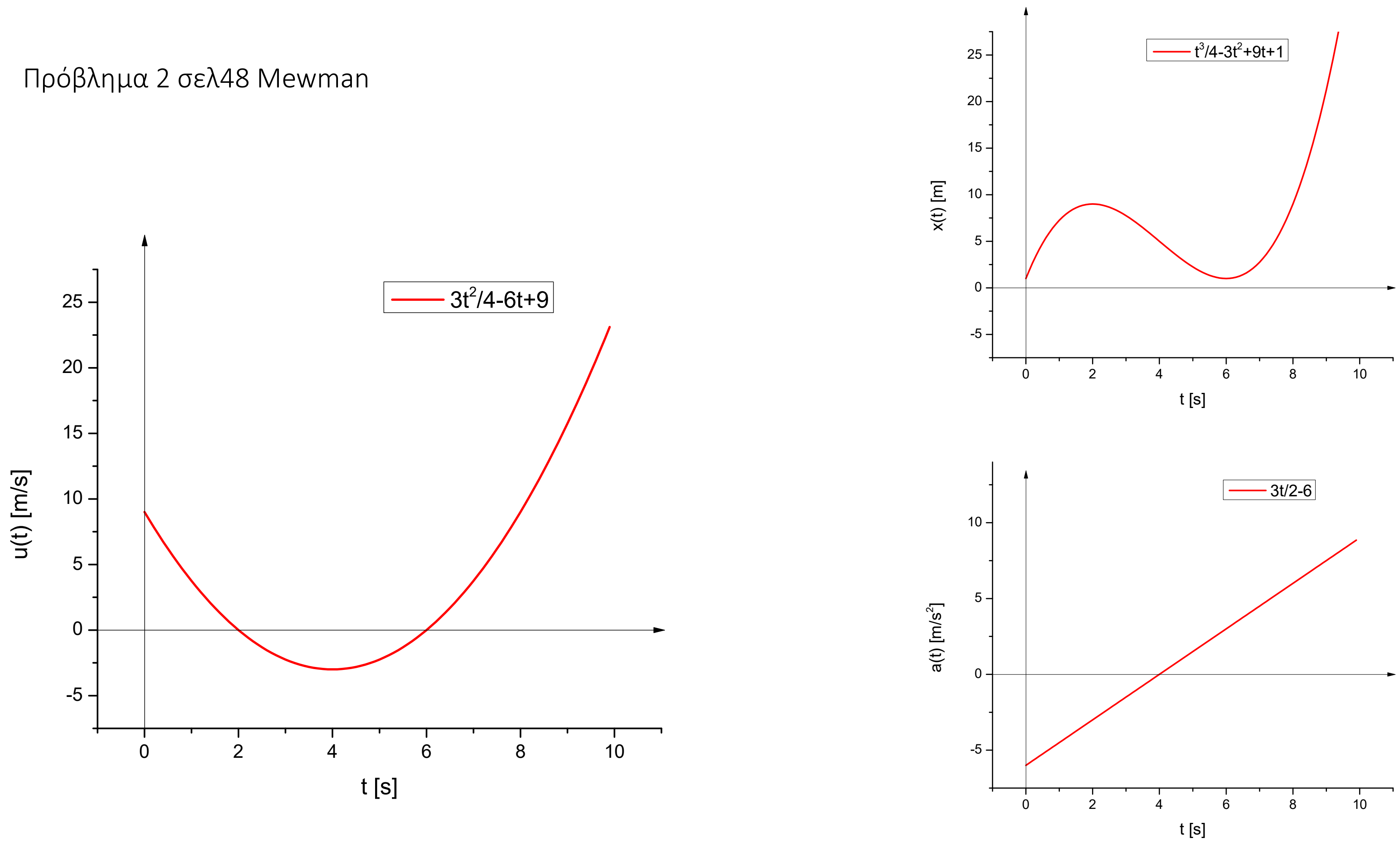
(β) Σχεδιάστε τώρα τη γραφική παράσταση θέσης-χρόνου λαμβάνοντας υπόψη και τα εννέα σημεία. Υπολογίστε την ταχύτητα αυτή τη φορά για καθένα από τα οκτώ χρονικά διαστήματα ξεκινώντας από το [0,1] και καταλήγοντας στο [7,8]. Υπολογίστε στη συνέχεια τη μέση τιμή της επιτάχυνσης για τα χρονικά διαστήματα [0,2], [2,4], [4,6], [6,8] χρησιμοποιώντας τις τιμές ταχύτητας που προσδιορίσατε προηγουμένως.

(γ) Επιβεβαιώστε το γεγονός ότι τα δεδομένα του πίνακα μπορούν να «αναπαραχθούν» από μια συνάρτηση της μορφής $x(t) = t^3/4 - 3t^2 + 9t + 1$. Δείξτε ότι η συγκεκριμένη συνάρτηση περιγράφει την κίνηση ενός αντικειμένου που κινείται προς τη θετική κατεύθυνση, σταματά και κινείται προς την αντίθετη κατεύθυνση και μετά από μια ακόμα στάση κινείται προς τη θετική κατεύθυνση με συνεχώς αυξανόμενη ταχύτητα.

(δ) Παρατηρήστε ότι όταν χρησιμοποιούμε, όπως στο ερώτημα (α), χρονικά διαστήματα των 4 s χάνουμε τις λεπτομέρειες της κίνησης, η οποία περιγράφεται με μεγαλύτερη πληρότητα αν χρησιμοποιήσουμε μικρότερα χρονικά διαστήματα. Σε ποιά χρονικά διαστήματα είναι η κλίση της γραφικής παράστασης $x(t)$ θετική; Πού είναι αρνητική και πού μηδέν; Ποιά η φυσική σημασία του προσήμου της κλίσης της καμπύλης $x(t)$; Αν η κλίση αυτής της καμπύλης αλλάζει πρόσημο, τι συμπέρασμα μπορούμε να βγάλουμε για την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σώματος;

t (s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x (m)	1	7,25	9	7,75	5	2,25	1	2,75	9

Πρόβλημα 2 σελ48 Mewman



ΤΡΟΧΙΑ – 2D

x=x(t) και y=y(t) → ΤΡΟΧΙΑ : y=f(x) χωρίς να περιλαμβάνεται ο χρόνος

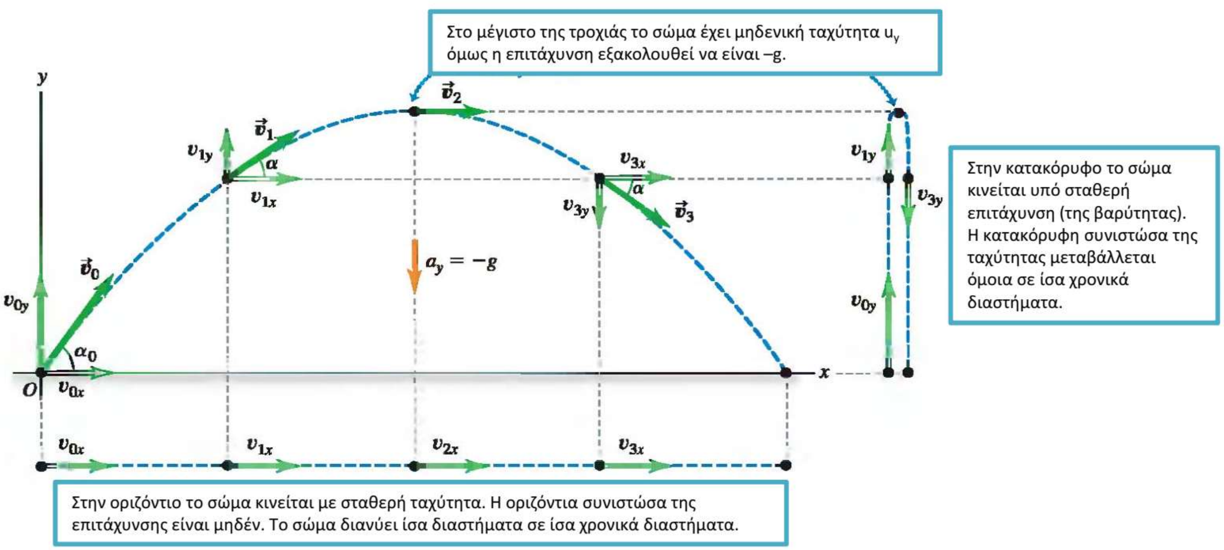
Παραμετρικές εξισώσεις κίνησης

{z=z(t)}

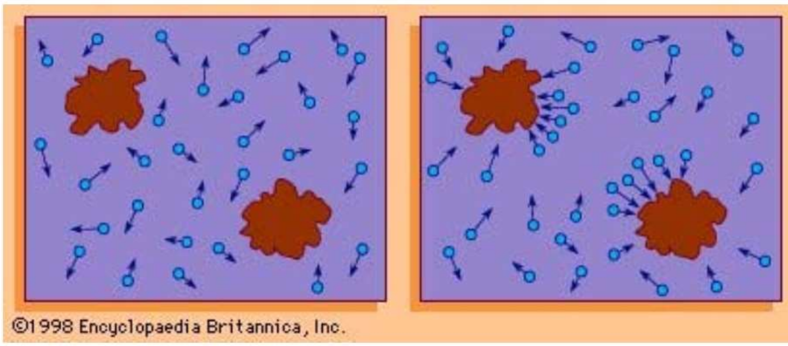
$x=u_{ox}t$ → Ομαλή ευθύγραμμη κίνηση

$y=u_{oy}t-(1/2)gt^2$ → Ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση (g)

$$y=\frac{u_{oy}}{u_{ox}}x-\frac{g}{2u_{ox}^2}x^2$$ ΠΑΡΑΒΟΛΗ

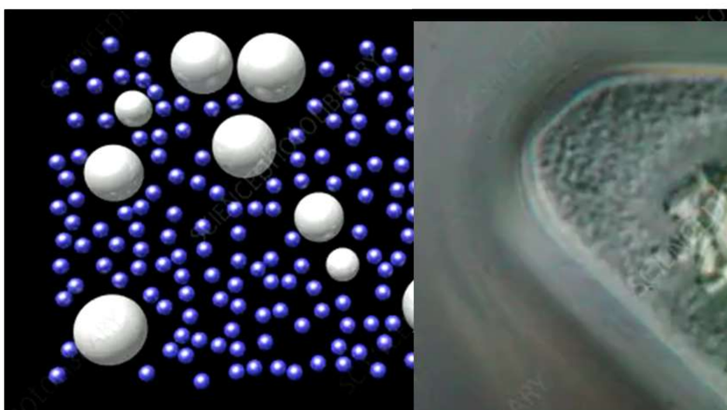


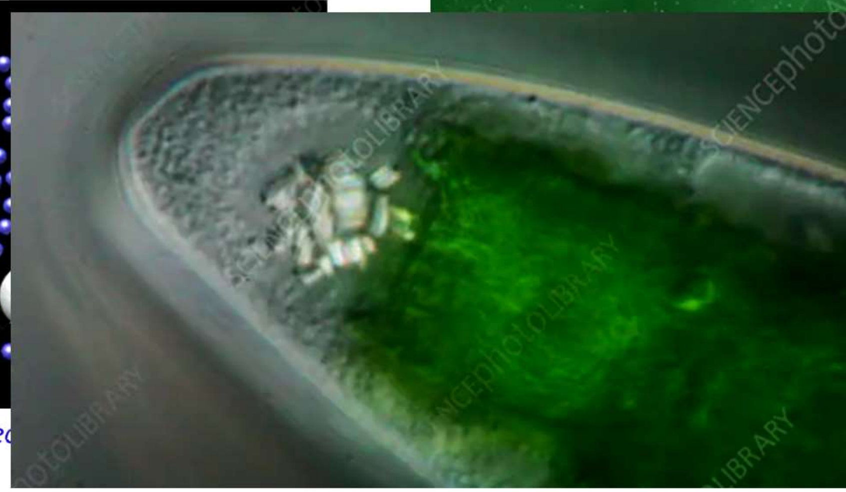
Κίνηση Brown



Random Walk

$\langle \Delta \mathrm{x} \rangle \propto t^{1/2}$ $D = \frac{kT}{6\pi\eta R}$, σε 3D





https://www.sciencephoto.com/mec
motion-animation

edia/237006/view/brownian-motion

Κίνηση Brown

Όνομα: από τον βοτανολόγο Robert Brown (1827) → μικροσκόπιο [παρατήρησε στο μικροσκόπιο την κίνηση κόκκων γύρης σε νερό]

Σημασία:

- Υποστήριξε την ατομική θεωρία
- Τα μαθηματικά που υποστηρίζουν την περιγραφή της συγκεκριμένης κίνησης βρίσκουν εφαρμογές:

    Μαθηματικά
    Μηχανική
    Βιολογία
    Χημεία κ.α.

Στις περισσότερες περιπτώσεις η κίνηση περιγράφει **διεργασίες μεταφοράς** (transport processes)

Διάχυση αέριων ρύπων
Διάχυση Ca στα οστά
Διάχυση θερμότητας σε στερεά
Κίνηση φορέων ρεύματος σε ημιαγωγούς
Κίνηση φωτονίων στο εσωτερικό του ήλιου κ.α.

Τα μαθηματικά περιλαμβάνουν τη **θεωρία του «Τυχαίου περίπατου (random walk)»**

Κίνηση Brown σε μια διάσταση

Πρόβλημα:

-Κινείστε σε μια διάσταση και στη χρονική στιγμή t=0 βρίσκεστε στην αρχή του άξονα.
-Μπορείτε να βαδίζετε κάνοντας ένα βήμα τη φορά, πριν όμως «στρίβετε νόμισμα» εάν φέρετε κεφαλή πάτε ένα βήμα μπροστά, εάν φέρετε γράμματα πάτε ένα βήμα πίσω. <u>Το βήμα σας έχει μήκος μονάδα</u>.
→Μετά από έναν αριθμό N βημάτων ποια η πιθανότητα να βρίσκεστε σε συγκεκριμένη θέση στον άξονα και πόσο μακριά από την αρχή του άξονα κατά μέσο όρο από το σημείο εκκίνησης;

Ορίζουμε τη συνάρτηση πιθανότητας $f_N(n)$ που δίνει την πιθανότητα μετά από N βήματα να βρεθείτε στη θέση n πάνω στον άξονα.

Για n=0 $f_0(0) = 1$
Για N=1 $f_1(-1) = ½$, $f_1(1) = ½$
Για N=2 $f_2(-2) = ¼$, $f_2(0) = ½$, $f_2(2) = ¼$
…
Για N=4 $f_4(4) = 1/16 = f_2(-4)$, $f_4(2) = 4/16 = ¼ = f_4(-4)$, $f_2(0) = 6/16 = 3/8$

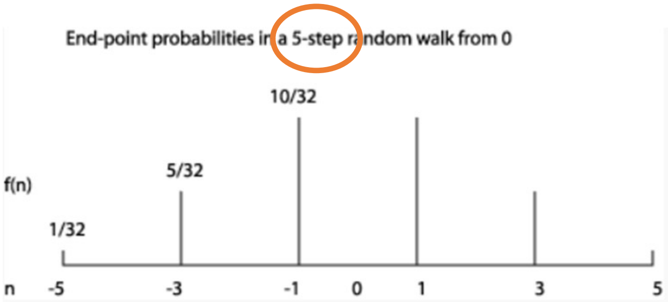
$(\alpha+\beta)^N$ Τρίγωνο του Pascal

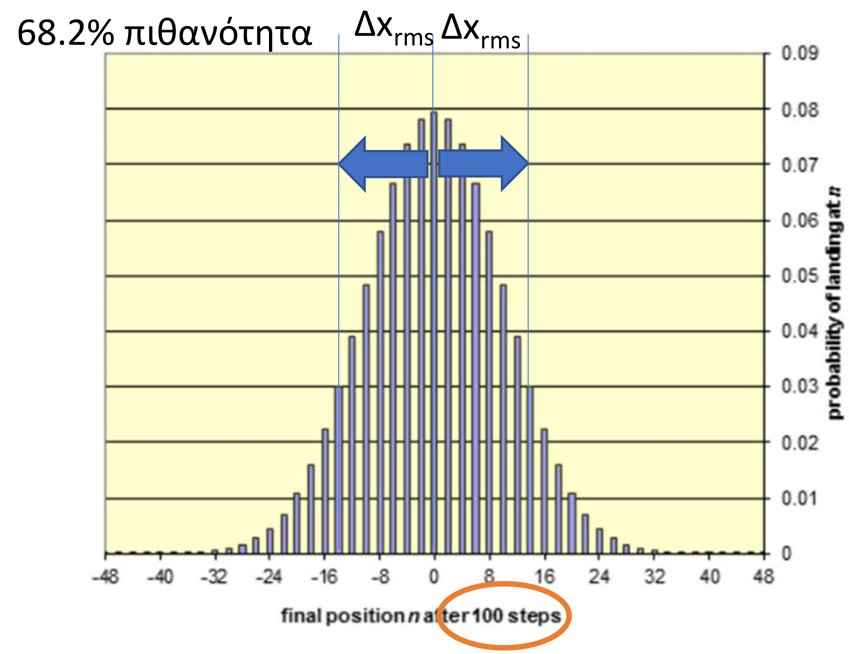
n	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f_0(n)$						1					
$2f_1(n)$					1		1				
$2^2f_2(n)$				1		2		1			
$2^3f_3(n)$			1		3		3		1		
$2^4f_4(n)$		1		4		6		4		1	
$2^5f_5(n)$	1		5		10		10		5		1

$2^N f(n)$

Κίνηση Brown σε μια διάσταση

Πώς μοιάζουν αυτές οι πιθανότητες?





Η τετραγωνική ρίζα της μέσης τιμής του τετραγώνου της απόστασης από την αρχή είναι $n^{1/2}$

$$[\langle(\Delta x)^2\rangle]^{1/2} = \Delta x_{rms}$$

Η rms απόκλιση από τη μέση τιμή

x_1=+1, -1 $\langle x_1 \rangle = 0, \langle {x_1}^2 \rangle = 1.$ Και μετά από N βήματα:

Path endpoint = $x_1 + x_2 + \ldots + x_N.$

Η μέση τιμή του τετραγώνου του μήκους της διαδρομής

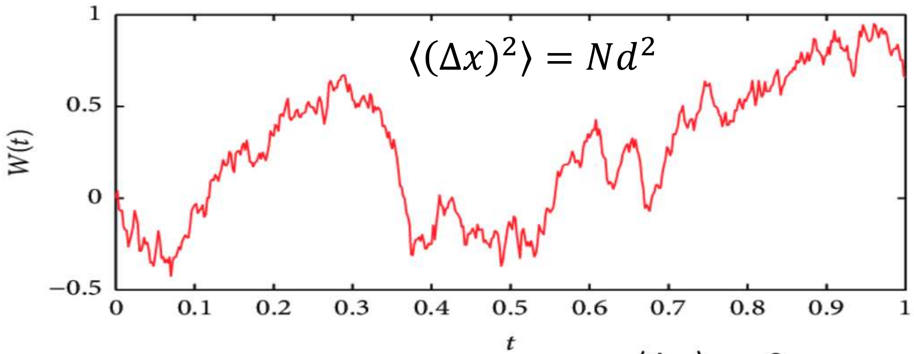
$\left\langle (x_1 + x_2 + \ldots + x_N)^2 \right\rangle.$ Ανάπτυγμα → n όροι με $\langle {x_1}^2 \rangle$ και n^2-n με τη μορφή $\langle x_1 x_2 \rangle$ που είναι μηδέν

$$\boxed{\left\langle (x_1 + x_2 + \ldots + x_N)^2 \right\rangle = n.}$$

Τυχαίος περίπατος

Διάχυση – diffusion / Stokes - Einstein

1D



$$\langle(\Delta x)^2\rangle = Nd^2$$

$$\langle\Delta x\rangle = 0$$

$$\langle(\Delta \mathrm{x})^2\rangle = 2Dt$$

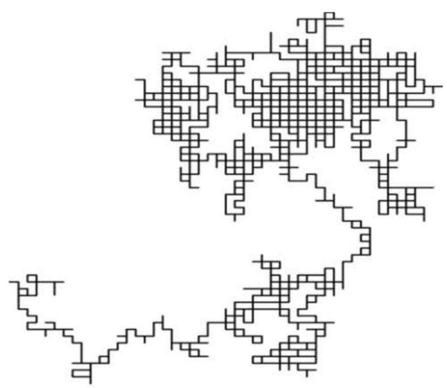
$$\Delta \mathrm{x}_{rms} = \sqrt{\langle(\Delta \mathrm{x})^2\rangle} \propto \sqrt{t}$$

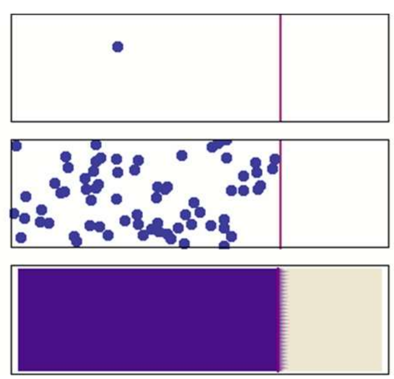
D: σταθερά διάχυσης (εξαρτάται από το σχήμα-μέγεθος σωματιδίου, τη θερμοκρασία και το ιξώδες)

Σφαίρα σε ρευστό $D = \frac{kT}{6\pi\eta R}$

low Reynolds number

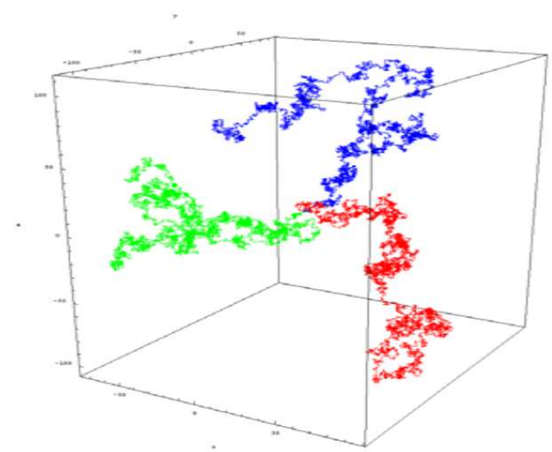
2D





$$\langle(\Delta \mathrm{x})^2\rangle = 4Dt$$

3D



$$\langle(\Delta \mathrm{x})^2\rangle = 6Dt$$

Παραδείγματα – random walk

Π.χ. 2.9 (3)
Ο συντελεστής διάχυσης για τη σακχαρόζη του αίματος (37^o C) είναι 9.6 10^{-11} m^2/s.
(α) Υπολογίστε τη μέση απόσταση $(\Delta x)_{rms}$ που ένα μόριο σακχαρόζης «εξερευνά» σε τρεις διαστάσεις σε χρόνο 1 h.
(β) Υπολογίστε το χρόνο που απαιτείται για ένα μόριο σακχαρόζης να διαχυθεί από το κέντρο στην περιφέρεια τριχοειδούς σωλήνα διαμέτρου 8 μm.

ΠΡ 25 (3)
Ένα κύτταρο βρίσκεται εντός τριχοειδούς σωλήνα (κίνηση σε μια διάσταση) και διαχέεται κινούμενο με συντελεστή διάχυσης 10^{-9} cm^2/s.
(α) Υπολογίστε τον απαιτούμενο χρόνο προκειμένου να καλύψει απόσταση 1 cm.
(β) Υπολογίστε την rms τιμή της απόστασης που διανύει το κύτταρο σε χρονικό διάστημα 1s.

Φωτόνιο από το κέντρο του Ήλιου στη Γη…