ΚΕΦΑΛΑΙΟ

# 4 Περιγραφή μεταβλητότητας



## *Πρόλογος*

*Οι μέσοι όροι είναι σημαντικοί, αλλά λένε μόνο τη μισή αλήθεια. Λίγοι θα δέχονταν να περάσουν ένα ορμητικό ρέμα γνωρίζοντας μόνο ότι το βάθος του νερού είναι κατά μέσο όρο 70 πόντοι.*

*Η στατιστική ευδοκιμεί επειδή ζούμε σε έναν κόσμο με μεγάλο βαθμό μεταβλητότητας: κανείς δεν είναι ίδιος με κάποιον άλλον και υπάρχουν επίσης μερικοί που είναι πραγματικά εκτός της δεσπόζουσας τάξης. Όταν συνοψίζουμε ένα σύνολο δεδομένων, δεν καθορίζουμε μόνο μέτρα κεντρικής τάσης, όπως τον αριθμητικό μέσο, αλλά επίσης* ***μέτρα μεταβλητότητας****, δηλαδή μέτρα της ποσότητας κατά την οποία τα αποτελέσματα διασπείρονται ή εμφανίζονται «διάσπαρτα» σε μια κατανομή. Αυτό το κεφάλαιο περιγράφει αρκετά μέτρα μεταβλητότητας, συμπεριλαμβανομένου του εύρους, του ενδοτεταρτομοριακού εύρους, της διασποράς και, του πιο σημαντικού, αυτού της τυπικής απόκλισης.*

***Μέτρα μεταβλητότητας***
*Περιγραφές της ποσότητας κατά την οποία τα αποτελέσματα διασπείρονται ή εμφανίζονται «διάσπαρτα» σε μια κατανομή.*

## 4.1 Διαισθητική προσέγγιση

Πιθανώς θα αντιλαμβάνεστε με βάση τη διαίσθησή σας τις διαφορές στη μεταβλητότητα. Στο Σχήμα 4.1, οι τρεις κατανομές συχνοτήτων αποτελούνται από επτά αποτελέσματα με τον ίδιο αριθμητικό μέσο (10), αλλά με διαφορετικές μεταβλητότητες, ή διακυμάνσεις. (Αγνοήστε τους αριθμούς μέσα στα πλαίσια – θα μιλήσουμε για τη σημασία τους αργότερα.) Πριν συνεχίσετε, ταξινομήστε τις τρεις κατανομές από τη μικρότερη ως τη μεγαλύτερη μεταβλητή. Η διαίσθησή σας ήταν σωστή αν συμπεράνατε ότι η κατανομή Α έχει τη *μικρότερη* μεταβλητότητα, η κατανομή Β έχει *μεσαία* μεταβλητότητα και η κατανομή Γ έχει τη *μεγαλύτερη* μεταβλητότητα.

Αν αυτό το συμπέρασμα δεν είναι προφανές, εξετάστε καθεμία από τις τρεις κατανομές, μία κάθε φορά, και παρατηρήστε τις διαφορές μεταξύ των τιμών μεμονωμένων αποτελεσμάτων. Για την κατανομή Α με τη μικρότερη («μηδενική») μεταβλητότητα, και τα επτά αποτελέσματα έχουν την ίδια τιμή (10). Για την κατανομή Β με την ενδιάμεση μεταβλητότητα, οι τιμές των αποτελεσμάτων διαφέρουν ελαφρώς (9 και 11) και, για την κατανομή Γ με τη μεγαλύτερη μεταβλητότητα, διαφέρουν ακόμα περισσότερο (ένα 7, δύο 9, δύο 11 και ένα 13).

## *Η σημασία της μεταβλητότητας*

Η μεταβλητότητα καταλαμβάνει σημαντικό ρόλο σε μια ανάλυση αποτελεσμάτων έρευνας. Για παράδειγμα, ένας ερευνητής θα μπορούσε να ρωτήσει το εξής: Η φυσική άσκηση βελτιώνει, κατά μέσο όρο, τους βαθμούς καταθλιπτικών ασθενών σε μια εξέταση νοητικής ικανότητας; Για να δοθούν απαντήσεις σ' αυτό το ερώτημα, οι καταθλιπτικοί ασθενείς εντάσσονται τυχαία σε δύο ομάδες, η μία ομάδα ακολουθεί πρόγραμμα φυσικής άσκησης και λαμβάνονται αποτελέσματα από τις εξετάσεις και από τις δύο ομάδες. Έστω ότι ο μέσος βαθμός ικανότητας είναι μεγαλύτερος για την ομάδα που ασκήθηκε. Η παρατηρούμενη μέση διαφορά μεταξύ των δύο ομάδων είναι πραγματική ή έχει παροδικό χαρακτήρα; Αυτή η απόφαση δεν εξαρτάται μόνο από το μέγεθος της μέσης διαφοράς μεταξύ των δύο ομάδων, αλλά επίσης από τις αναπόφευκτες διακυμάνσεις μεμονωμένων αποτελεσμάτων μέσα σε κάθε ομάδα.

Για να δείξουμε τη σημασία της μεταβλητότητας, παραθέτουμε το Σχήμα 4.2 με τα αποτελέσματα για δύο φανταστικά πειράματα, τα οποία *έχουν την ίδια μέση διαφορά 2*, αλλά με τις δύο ομάδες στο πείραμα Β να έχουν μικρότερη μεταβλητότητα από τις δύο ομάδες στο πείραμα Γ. Σημειώστε ότι οι ομάδες Β και Γ στο Σχήμα 4.2 είναι ίδιες με τις αντίστοιχες του Σχήματος 4.1. Αν και η νέα ομάδα Β* διατηρεί ακριβώς την ίδια (μεσαία) μεταβλητότητα με την ομάδα Β, καθένα από τα επτά αποτελέσματά της και ο μέσος της έχουν μετατοπιστεί κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά. Ομοίως, εάν και η νέα ομάδα Γ* διατηρεί ακριβώς την ίδια (μεγάλη) μεταβλητότητα με την ομάδα Γ, καθένα από τα επτά αποτελέσματά της και ο μέσος της έχουν μετατοπιστεί κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά. Κατά συνέπεια, η κρίσιμη μέση διαφορά 2 (12 – 10 = 2) είναι ίδια και για τα δύο πειράματα.

Πριν συνεχίσετε, πρέπει να αποφασίσετε ποια μέση διαφορά 2 στο Σχήμα 4.2 είναι πιο προφανής. Η μέση διαφορά για το πείραμα Β θα πρέπει να φαίνεται πιο προφανής εξαιτίας των μικρότερων διακυμάνσεων μέσα στις δύο ομάδες Β και Β*. Ακριβώς όπως είναι πιο εύκολο να ακούσουμε ένα τηλεφωνικό μήνυμα όταν μειώνονται τα παράσιτα, είναι πιο εύκολο να δούμε διαφορά μεταξύ μέσων ομάδων όταν μειώνονται οι μεταβλητότητες μέσα σε ομάδες.

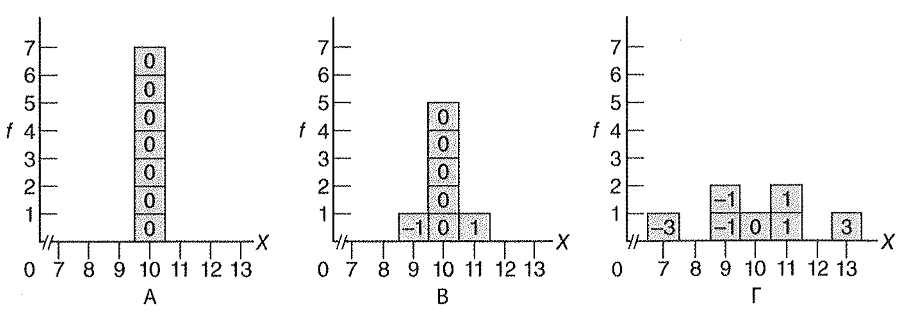
Όπως περιγράφεται σε επόμενα κεφάλαια, οι μεταβλητότητες μέσα σε ομάδες παίζουν σημαντικό ρόλο στην επαγωγική στατιστική. Εν συντομία, οι σχετικά μικρότερες μεταβλητότητες μέσα σε ομάδες στο πείραμα Β μεταφράζονται σε *μεγαλύτερη στατιστική σταθερότητα* για την παρατηρούμενη μέση διαφορά 2 *όταν θεωρείται απλώς ένα αποτέλεσμα μεταξύ πολλών πιθανών αποτελεσμάτων για πειράματα επανάληψης*. Επομένως, στον βαθμό που *παρόμοιες* (αλλά όχι απαραίτητα ίδιες) μέσες διαφορές θα επανεμφανίζονταν σε πειράματα επανάληψης, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η παρατηρούμενη μέση διαφορά 2 στο πείραμα Β πιθανώς εκπροσωπεί μια πραγματική διαφορά υπέρ του πειραματικού χειρισμού.

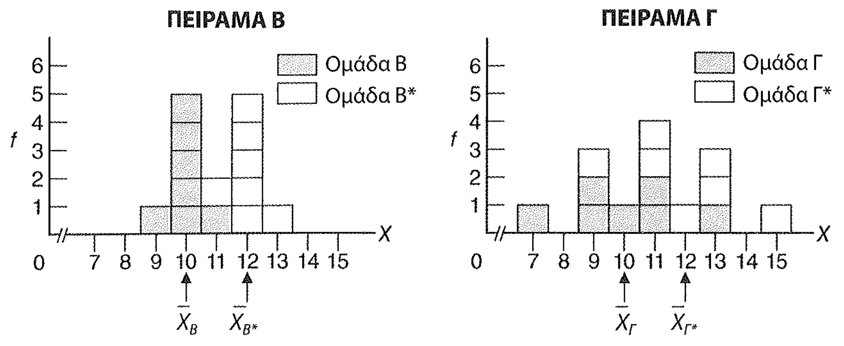
Από την άλλη πλευρά, οι σχετικά μεγαλύτερες μεταβλητότητες εντός των ομάδων στο πείραμα Γ μεταφράζονται σε *μικρότερη στατιστική σταθερότητα* για την παρατηρούμενη μέση διαφορά 2 όταν θεωρείται απλώς ένα αποτέλεσμα εν μέσω πολλών πιθανών αποτελεσμάτων για πειράματα επανάληψης. Στον βαθμό που *διαφορετικές* μέσες διαφορές –ακόμα και μηδενικές ή αρνητικές μέσες διαφορές– θα εμφανίζονταν σε πειράματα επανάληψης, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η παρατηρούμενη μέση διαφορά 2 *δεν* εκπροσωπεί μια πραγματική διαφορά υπέρ του πειραματικού χειρισμού στο πείραμα Γ. Αντίθετα, επειδή πιθανότατα είναι προϊόν τυχαίας μεταβλητότητας, η παρατηρούμενη μέση διαφορά 2 στο πείραμα Γ μπορεί να θεωρηθεί παροδική και να μη ληφθεί σοβαρά υπόψη.

Στην Ερώτηση επανάληψης 14.10 στη σελίδα 353 θα επιτρέψουμε πιο συγκεκριμένα συμπεράσματα σχετικά με το αν καθεμία από τις μέσες διαφορές 2 για τα πειράματα Β και Γ πρέπει να θεωρούνται ότι εκφράζουν μια πραγματική διαφορά ή αν θα πρέπει να παραλείπονται ως παροδικές. Αυτά τα συμπεράσματα θα απαιτούν τη

**ΣΧΗΜΑ 4.1**

*Τρεις κατανομές με τον ίδιο μέσο (10) αλλά διαφορετικές ποσότητες μεταβλητότητας. Οι αριθμοί και τα πλαίσια δείχνουν τις αποστάσεις από τον μέσο.*






**ΣΧΗΜΑ 4.2**
*Δύο πειράματα με την ίδια μέση διαφορά αλλά διαφορετικές μεταβλητότητες.*

χρήση ενός μέτρου μεταβλητότητας, της τυπικής απόκλισης, για την οποία θα μιλήσουμε σ' αυτό το κεφάλαιο, μαζί με εργαλεία από την επαγωγική στατιστική που θα περιγράψουμε στο Μέρος 2.

**Έλεγχος προόδου *4.1** Για μια δεδομένη μέση διαφορά –έστω 10 βαθμών– μεταξύ δύο ομάδων, ποιος βαθμός μεταβλητότητας μέσα σε κάθε ομάδα (μικρός, μεσαίος ή μεγάλος) κάνει τη μέση διαφορά
**(α)** ...πιο εμφανή, με μεγαλύτερη στατιστική σταθερότητα;
**(β)** ...λιγότερο εμφανή, με μικρότερη στατιστική σταθερότητα;
*Απαντήσεις στη σελίδα 534.*

## 4.2 Εύρος

Τα ακριβή μέτρα μεταβλητότητας δεν συμβάλλουν μόνο στην επικοινωνία, αλλά είναι επίσης απαραίτητα εργαλεία στη στατιστική, και ένα τέτοιο μέτρο είναι το εύρος. *Το **εύρος** είναι η διαφορά μεταξύ της μεγαλύτερης και της μικρότερης τιμής των αποτελεσμάτων μας.* Στο Σχήμα 4.1, η κατανομή Α, η μικρότερη μεταβλητή, έχει το μικρότερο εύρος 0 (από το 10 ως το 10), η κατανομή Β, η μεσαία μεταβλητή, έχει ενδιάμεσο εύρος 2 (από το 11 ως το 9) και η κατανομή Γ, η μεγαλύτερη μεταβλητή, έχει το μεγαλύτερο εύρος 6 (από το 13 ως το 7), σύμφωνα με τις «διαισθητικές» κρίσεις που κάνουμε για διαφορές στη μεταβλητότητα. Το εύρος είναι ένα πρακτικό μέτρο μεταβλητότητας το οποίο υπολογίζεται και γίνεται εύκολα κατανοητό.

### *Μειονεκτήματα του εύρους*

Το **εύρος** έχει αρκετά μειονεκτήματα. Πρώτον, επειδή η τιμή του εξαρτάται από μόλις δύο αποτελέσματα-τιμές –τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή–, δεν καταφέρνει να χρησιμοποιεί τις πληροφορίες που παρέχουν οι υπόλοιπες. Επιπλέον, η τιμή του εύρους τείνει να αυξάνεται ανάλογα με τις αυξήσεις στον συνολικό αριθμό των αποτελεσμάτων. Για παράδειγμα, το εύρος του ύψους ενηλίκων μπορεί να είναι 15 ή 20 πόντοι για 5 ανθρώπους, ενώ μπορεί να είναι 35 ή 40 πόντοι για 50 ανθρώπους. Οι μεγαλύτερες ομάδες έχουν περισσότερες πιθανότητες να περιλαμβάνουν πολύ κοντούς ή πολύ ψηλούς ανθρώπους, οι οποίοι βέβαια διογκώνουν την τιμή του εύρους. Συνεπώς, αντί να είναι ένα σχετικά σταθερό μέτρο μεταβλητότητας, το μέγεθος του εύρους τείνει να διαφέρει ανάλογα με το μέγεθος της ομάδας.

***Εύρος***
*Η διαφορά μεταξύ της μεγαλύτερης και της μικρότερης τιμής των αποτελεσμάτων.*

## 4.3 Διασπορά

Αν και τόσο το εύρος όσο και το δευτερεύον σημαντικό μέτρο που σχετίζεται με αυτό, το ενδοτεταρτομοριακό εύρος (βλ. Ενότητα 4.7), είναι έγκυρα μέτρα μεταβλητότητας, κανένα από τα δύο δεν αποτελεί βασική προτίμηση των στατιστικολόγων ως μέτρο μεταβλητότητας. Αυτός ο ρόλος δεσμεύεται για τη διασπορά και *ιδιαίτερα για την τετραγωνική ρίζα της, την τυπική απόκλιση*, επειδή αυτά τα μέτρα αποτελούν βασικά συστατικά άλλων σημαντικών στατιστικών μέτρων. Αναλόγως, η διασπορά και η τυπική απόκλιση κατέχουν την ίδια σημαντική θέση μεταξύ των μέτρων μεταβλητότητας όπως ο αριθμητικός μέσος μεταξύ των μέτρων κεντρικής τάσης.

Ακολουθώντας τις υπολογιστικές διαδικασίες που περιγράφουμε σε επόμενες ενότητες αυτού του κεφαλαίου, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την τιμή της διασποράς για καθεμία από τις τρεις κατανομές του Σχήματος 4.1. Η τιμή της ισούται με 0,00 για τη λιγότερο μεταβαλλόμενη κατανομή, Α, 0,29 για τη μεσαία μεταβαλλόμενη κατανομή, Β, και 3,14 για τη μεγαλύτερη μεταβαλλόμενη κατανομή, Γ, σύμφωνα με τις διαισθητικές κρίσεις μας για τη σχετική μεταβλητότητα αυτών των τριών κατανομών.

### *Ανακατασκευή της διασποράς*

Για να κατανοήσετε καλύτερα την έννοια της διασποράς, θα την ανακατασκευάσουμε βήμα προς βήμα. Αν και είναι μέτρο μεταβλητότητας, η διασπορά χρησιμοποιείται επίσης ως τύπος αριθμητικού μέσου, δηλαδή ως το σημείο ισορροπίας για κάποια κατανομή. Ως τέτοιο, πρέπει να γίνεται πρόσθεση των τιμών όλων των αποτελεσμάτων και έπειτα διαίρεση του αθροίσματος διά του συνολικού αριθμού των αποτελεσμάτων. Στην περίπτωση της διασποράς, κάθε αρχική τιμή εκφράζεται εκ νέου ως απόσταση ή απόκλιση από τον μέσο, αφού αφαιρεθεί ο μέσος. Για καθεμία από τις τρεις κατανομές του Σχήματος 4.1, οι αριθμητικές τιμές των επτά αρχικών αποτελεσμάτων (εμφανίζονται ως αριθμοί στον άξονα *X*) έχουν εκφραστεί εκ νέου ως αποτελέσματα απόκλισης από τον μέσο τους, 10 (αριθμοί μέσα στα πλαίσια). Για παράδειγμα, στην κατανομή Γ, ένα αποτέλεσμα συμπίπτει με τον μέσο 10, τέσσερα αποτελέσματα (δύο 9 και δύο 11) αποκλίνουν κατά 1 μονάδα από τον μέσο και δύο αποτελέσματα (ένα 7 και ένα 13) αποκλίνουν 3 μονάδες από τον μέσο, δίνοντας ένα σύνολο επτά αποτελεσμάτων απόκλισης: ένα 0, δύο –1, δύο 1, ένα –3 και ένα 3. (Τα αποτελέσματα απόκλισης πάνω από τον μέσο παίρνουν θετικά πρόσημα και όσα είναι κάτω από τον μέσο παίρνουν αρνητικά πρόσημα.)

### *Ο μέσος των αποκλίσεων δεν είναι χρήσιμο μέτρο*

Κανένα χρήσιμο μέτρο μεταβλητότητας δεν μπορεί να παραχθεί από τον υπολογισμό του μέσου αυτών των επτά αποκλίσεων, επειδή, όπως είπαμε στο Κεφάλαιο 3, το άθροισμα όλων των αποκλίσεων από τον μέσο τους ισούται πάντα με μηδέν. Κατά συνέπεια, το άθροισμα όλων των αρνητικών αποκλίσεων αντισταθμίζει πάντοτε το άθροισμα όλων των θετικών αποκλίσεων, ανεξάρτητα από την ποσότητα της μεταβλητότητας στην ομάδα.[12]

### *Μέσος τετραγωνικών αποκλίσεων*

Πριν από τον υπολογισμό της διασποράς (ενός τύπου αριθμητικού μέσου), πρέπει να αφαιρεθούν τα αρνητικά πρόσημα από τα αποτελέσματα απόκλισης. Υψώνοντας στο τετράγωνο κάθε τιμή απόκλισης –δηλαδή ο πολλαπλασιασμός κάθε απόκλισης επί τον εαυτό της– παράγουμε ένα σύνολο τετραγωνικών αποτελεσμάτων απόκλισης τα οποία στο σύνολό τους είναι θετικά. (Θυμίζουμε ότι το γινόμενο οποιωνδήποτε δύο αριθμών με ίδια πρόσημα είναι πάντοτε θετικό.) Τώρα μένει να προστεθούν οι θετικές τιμές όλων των τετραγωνικών αποτελεσμάτων απόκλισης και το άθροισμα να διαιρεθεί διά του συνολικού αριθμού για να εξαχθεί *ο αριθμητικός μέσος όλων των τετραγωνικών αποτελεσμάτων απόκλισης, ο οποίος είναι επίσης γνωστός ως* **διασπορά**.

**Διασπορά**
*Ο αριθμητικός μέσος όλων των τετραγωνικών αποτελεσμάτων απόκλισης.*

### *Η αδυναμία της διασποράς*

Στην περίπτωση των βαρών των 53 φοιτητών του Πίνακα 1.1 στη σελίδα 24, είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε ότι ο αριθμητικός μέσος για την κατανομή βαρών ισούται με 169,51 λίβρες, αλλά θα μπορούσαμε να μπερδευτούμε αν μαθαίναμε ότι, εξαιτίας των τετραγωνικών αποκλίσεων, η διασπορά για την ίδια κατανομή ισούται με 544,29 *τετραγωνικές λίβρες*. Θα μπορούσατε πολύ εύλογα να αναρωτηθείτε, τι είναι οι τετραγωνικές λίβρες;

---

12. Ένα μέτρο μεταβλητότητας, γνωστό ως η *απόλυτη απόκλιση του μέσου* (ή *m.a.d.*, από τα αρχικά Mean Absolute Deviation), μπορεί να οριστεί αν αθροίσουμε όλες τις *απόλυτες* αποκλίσεις από τον μέσο, δηλαδή παραλείποντας τα αρνητικά πρόσημα. Ωστόσο, αυτό το μέτρο μεταβλητότητας δεν προτιμάται, επειδή, τελικά, η απλή πράξη της παράλειψης των αρνητικών προσήμων έχει μη επιθυμητές μαθηματικές και στατιστικές επιπτώσεις.

## 4.4 Τυπική απόκλιση

Για να απαλλαγείτε απ' αυτές τις δυσβάσταχτες μονάδες μέτρησης, απλώς χρησιμοποιείτε την τετραγωνική ρίζα της διασποράς.[13] Καταλήγετε έτσι σε ένα νέο μέτρο, την τυπική απόκλιση, η οποία περιγράφει τη μεταβλητότητα στις αρχικές μονάδες μέτρησης. Για παράδειγμα, η τυπική απόκλιση για την κατανομή βαρών ισούται με την τετραγωνική ρίζα των 544,29 τετραγωνικών λιβρών, δηλαδή 23,33 λίβρες.

Η διασπορά συχνά παίζει έναν ειδικό ρόλο σε πιο προηγμένες στατιστικές εργασίες, όπως εκείνες που περιγράφονται στα Κεφάλαια 16, 17 και 18. Διαφορετικά, εξαιτίας των «μη κατανοητών» μονάδων μέτρησης, η διασπορά είναι πρωτίστως ένα ενδιάμεσο βήμα, μια τετραγωνική ρίζα μακριά από ένα καλύτερο μέτρο μεταβλητότητας, την τυπική απόκλιση, *την τετραγωνική ρίζα του αριθμητικού μέσου όλων των τετραγωνικών αποκλίσεων από τον μέσο, ή, με άλλα λόγια,*

$$\textit{τυπική απόκλιση} = \sqrt{\textit{διασπορά}}$$

**Τυπική απόκλιση**
*Ένα γενικό μέτρο της μέσης (ή τυπικής) ποσότητας κατά την οποία τα αποτελέσματα αποκλίνουν αμφιπλεύρως του μέσου τους.*

### *Τυπική απόκλιση: Μια ερμηνεία*

**Θα ήταν χρήσιμο να σκεφτείτε την τυπική απόκλιση ως ένα *γενικό* μέτρο της μέσης (ή τυπικής) ποσότητας κατά την οποία τα αποτελέσματά μας αποκλίνουν δεξιά και αριστερά (αμφιπλεύρως) του μέσου τους.**

Για την κατανομή Γ του Σχήματος 4.1, η τετραγωνική ρίζα της διασποράς του 3,14 δίνει τυπική απόκλιση 1,77. Δοθέντος αυτού, η τυπική απόκλιση 1,77 είναι ένα γενικό μέτρο της μέσης ποσότητας κατά την οποία τα επτά αποτελέσματα στην κατανομή Γ (7, 9, 9, 10, 11, 11, 13) αποκλίνουν αμφιπλεύρως του μέσου τους 10. Με άλλα λόγια, η τυπική απόκλιση 1,77 είναι ένα γενικό μέτρο της μέσης ποσότητας για τα επτά αποτελέσματα απόκλισης στην κατανομή Γ, δηλαδή ένα 0, τέσσερα 1 και δύο 3. Σημειώστε ότι, στον βαθμό που είναι ένας μέσος όρος, η τιμή της τυπικής απόκλισης θα πρέπει να βρίσκεται πάντα ανάμεσα στο μεγαλύτερο και το μικρότερο αποτέλεσμα απόκλισης, όπως συμβαίνει στην κατανομή Γ.

### *Στην πραγματικότητα είναι μεγαλύτερη από τη μέση απόκλιση*

Με απόλυτη ακρίβεια, η τυπική απόκλιση συνήθως υπερβαίνει τη μέση απόκλιση, ή, ακόμα καλύτερα, την απόλυτη απόκλιση του μέσου. (Στην περίπτωση της κατανομής Γ στο Σχήμα 4.1, για παράδειγμα, η τυπική απόκλιση ισούται με 1,77, ενώ η απόλυτη απόκλιση του μέσου ισούται μόλις με 1,43.) Ωστόσο, είναι εύλογο να περιγράψουμε την τυπική απόκλιση ως τη μέση ποσότητα κατά την οποία τα αποτελέσματα αποκλίνουν αμφιπλεύρως του μέσου τους – αρκεί να μην ξεχνάτε ότι εμπλέκεται μια προσέγγιση στον υπολογισμό.

### *Η πλειοψηφία των αποτελεσμάτων μέσα σε μία τυπική απόκλιση*

Μια ελαφρώς διαφορετική προοπτική καθιστά την τυπική απόκλιση ακόμα πιο προσιτή.

**Για τις περισσότερες κατανομές συχνοτήτων, μια πλειοψηφία (έως και 68%) όλων των αποτελεσμάτων βρίσκεται εντός μίας τυπικής απόκλισης δεξιά και αριστερά (αμφιπλεύρως) του μέσου.**

Αυτή η γενίκευση ισχύει για όλες τις κατανομές του Σχήματος 4.1. Για παράδειγμα, μεταξύ των επτά αποκλίσεων στην κατανομή Γ, πέντε αποτελέσματα αποκλίνουν κατά λιγότερο από μία τυπική απόκλιση (1,77) αμφιπλεύρως του μέσου. Ουσιαστικά, το ίδιο μοτίβο περιγράφει μια μεγάλη ποικιλία κατανομών συχνοτήτων, συμπεριλαμβανομένων των δύο που παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.3, όπου το γράμμα $s$ αναπαριστά την τυπική απόκλιση. Όπως δείχνει το επάνω πλαίσιο του Σχήματος 4.3, αν η κατανομή των αποτελεσμάτων μιας εξέτασης IQ σε μαθητές της

13. Η τετραγωνική ρίζα ενός αριθμού είναι ο αριθμός ο οποίος όταν πολλαπλασιάζεται με τον εαυτό του δίνει αυτόν τον αριθμό. Για παράδειγμα, η τετραγωνική ρίζα του 16 είναι το 4, επειδή $4 \times 4 = 16$. Για να εξαχθεί η τετραγωνική ρίζα οποιουδήποτε αριθμού, χρησιμοποιούμε μια αριθμομηχανή με το πλήκτρο τετραγωνικής ρίζας, το οποίο συνήθως συμβολίζεται ως $\sqrt{\ }$.

τετάρτης δημοτικού έχει μέσο ($\overline{X}$) 105 και τυπική απόκλιση ($s$) 15, η πλειοψηφία των αποτελεσμάτων θα βρίσκεται εντός μίας τυπικής απόκλισης αμφιπλεύρως του μέσου, δηλαδή μεταξύ 90 και 120. Με την ίδια λογική, όπως δείχνει το κάτω πλαίσιο του Σχήματος 4.3, αν η κατανομή εβδομαδιαίων ωρών μελέτης για μια ομάδα φοιτητών, όπως υπολογίζονται στην εγγύτερη ώρα, έχει μέσο ($\overline{X}$) 27 ώρες και τυπική απόκλιση ($s$) 10 ώρες, η πλειοψηφία των ωρών μελέτης θα βρισκόταν εντός μίας τυπικής απόκλισης αμφιπλεύρως του μέσου, δηλαδή μεταξύ 17 και 37 ώρες.

### *Μια μικρή μειοψηφία αποτελεσμάτων αποκλίνει περισσότερο από δύο τυπικές αποκλίσεις*

Η τυπική απόκλιση μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί ως γενίκευση για τις ακραίες περιπτώσεις στις κατανομές συχνοτήτων:

> **Για τις περισσότερες κατανομές συχνοτήτων, μια μικρή μειοψηφία (συνήθως 5%) όλων των αποτελεσμάτων αποκλίνει περισσότερο από δύο τυπικές αποκλίσεις αμφιπλεύρως του μέσου.**

Αυτή η γενίκευση περιγράφει τις κατανομές του Σχήματος 4.1. Για παράδειγμα, μεταξύ των επτά αποκλίσεων στην κατανομή Γ, καμία δεν αποκλίνει περισσότερο από δύο τυπικές αποκλίσεις ($2 \times 1{,}77 = 3{,}54$) αμφιπλεύρως του μέσου. Όπως δείχνει το Σχήμα 4.3, σχετικά λίγοι μαθητές της τετάρτης δημοτικού έχουν αποτελέσματα IQ που αποκλίνουν περισσότερο από δύο τυπικές αποκλίσεις ($2 \times 15 = 30$) αμφιπλεύρως του μέσου 105, δηλαδή αποτελέσματα IQ μικρότερα από 75 (105 – 30) ή μεγαλύτερα από 135 (105 + 30). Ομοίως, σχετικά λίγοι φοιτητές εκτιμούν ότι οι εβδομαδιαίες ώρες μελέτης τους είναι περισσότερες από δύο τυπικές αποκλίσεις ($2 \times 10 = 20$) αμφιπλεύρως του μέσου 27, δηλαδή λιγότερες από 7 ώρες (27 – 20) ή περισσότερες από 47 ώρες (27 + 20).

### *Οι γενικεύσεις αφορούν όλες τις κατανομές*

Αυτές οι δύο γενικεύσεις σχετικά με την πλειοψηφία και τη μειοψηφία των αποτελεσμάτων είναι ανεξάρτητες από το συγκεκριμένο σχήμα της κατανομής. Στο Σχήμα 4.3, ισχύουν τόσο για τη συμμετρική κατανομή αποτελεσμάτων IQ όσο και για τη θετικά ασύμμετρη κατανομή των ωρών μελέτης. Στην πραγματικότητα, η συμμετρική κατανομή αποτελεσμάτων IQ προσεγγίζει μια σημαντική θεωρητική κατανομή, την κανονική κατανομή. Όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, για τις κανονικές κατανομές, οι γενικεύσεις είναι μάλλον πολύ περισσότερες.

**Έλεγχος προόδου *4.2** Οι εργαζόμενοι της επιχείρησης Α έχουν ετήσιες απολαβές που περιγράφονται από έναν μέσο ύψους \$90.000 και μια τυπική απόκλιση \$10.000.

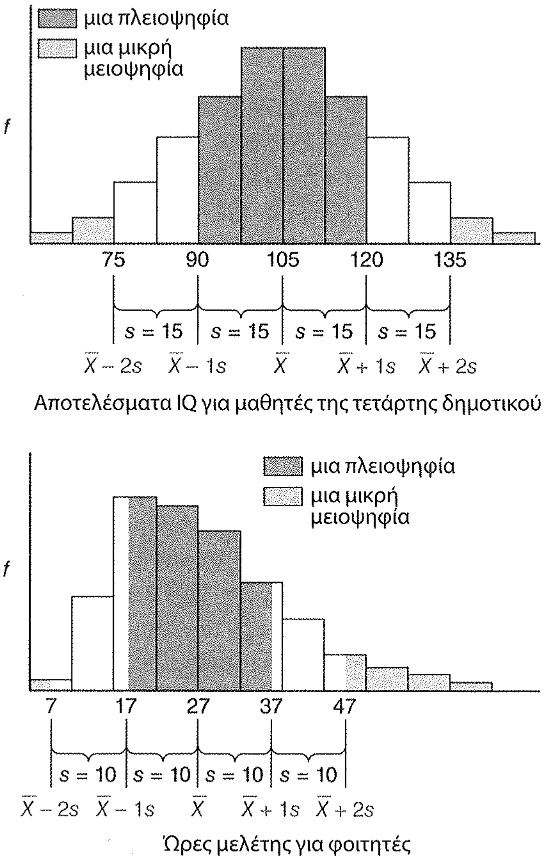
**(α)** Η πλειοψηφία όλων των μισθών βρίσκεται μεταξύ ποιων δύο τιμών;

**(β)** Μια μικρή μειοψηφία όλων των μισθών είναι μικρότερη από ποια τιμή;

**(γ)** Μια μειοψηφία όλων των μισθών είναι μεγαλύτερη από ποια τιμή;

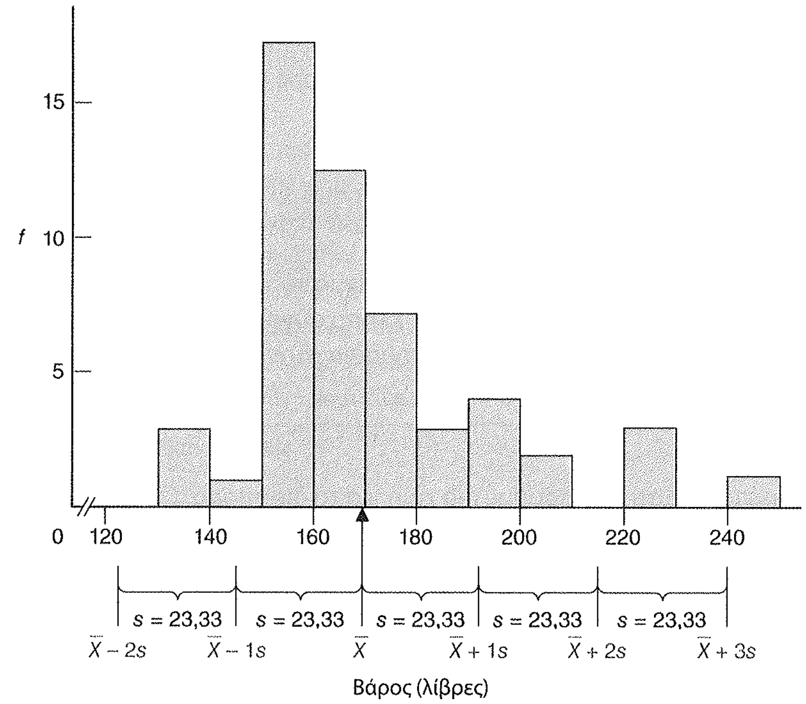
**(δ)** Απαντήστε στα (α), (β) και (γ) για εργαζομένους της επιχείρησης Β οι οποίοι έχουν ετήσιες απολαβές που περιγράφονται από έναν μέσο \$90.000 και μια τυπική απόκλιση \$2.000.

*Απαντήσεις στη σελίδα 534.*




**ΣΧΗΜΑ 4.3**

*Κάποιες γενικεύσεις που ισχύουν για τις περισσότερες κατανομές συχνοτήτων.*




**ΣΧΗΜΑ 4.4**

*Κατανομή βαρών με μέσο και τυπική απόκλιση.*

## *Τυπική απόκλιση: Ένα μέτρο απόστασης*

Υπάρχει μια σημαντική διαφορά μεταξύ της τυπικής απόκλισης και του απολύτως αναγκαίου μέτρου, του (αριθμητικού) μέσου. *Ο αριθμητικός μέσος είναι ένα μέτρο θέσης, αλλά η τυπική απόκλιση είναι ένα μέτρο απόστασης* (δεξιά και αριστερά *του μέσου της κατανομής*). Το Σχήμα 4.4 περιγράφει την κατανομή βαρών για τους άντρες που είδαμε στο Σχήμα 2.1. Παρατηρήστε ότι ο μέσος ($\overline{X}$) 169,51 λίβρες έχει μια συγκεκριμένη θέση κατά μήκος του οριζόντιου άξονα: βρίσκεται στο σημείο και μόνο σε εκείνο το σημείο που αντιστοιχεί στις 169,51 λίβρες. Από την άλλη πλευρά, η τυπική απόκλιση ($s$) των 23,33 λιβρών για την ίδια κατανομή δεν έχει συγκεκριμένη θέση στον οριζόντιο άξονα. Χρησιμοποιώντας την τυπική απόκλιση ως μέτρο απόστασης δεξιά και αριστερά του μέσου, θα περιγράφαμε το βάρος ενός ατόμου ως δύο τυπικές αποκλίσεις πάνω από τον μέσο, $\overline{X} + 2s$, το βάρος ενός άλλου ατόμου ως τα δύο τρίτα μίας τυπικής απόκλισης κάτω από τον μέσο, $\overline{X} - ⅔s$, κ.ο.κ.

## *Η τιμή της τυπικής απόκλισης δεν μπορεί να είναι αρνητική*

Οι αποστάσεις της τυπικής απόκλισης ξεκινούν πάντα από τον μέσο και εκφράζονται ως θετικές αποκλίσεις πάνω από τον μέσο ή αρνητικές αποκλίσεις κάτω απ' αυτόν. Θα πρέπει ωστόσο να σημειώσετε ότι, αν και η πραγματική τιμή της τυπικής απόκλισης μπορεί να είναι μηδέν ή ένας θετικός αριθμός, δεν μπορεί να είναι ποτέ αρνητικός αριθμός, επειδή οποιαδήποτε αρνητική απόκλιση εξαφανίζεται όταν υψώνεται στο τετράγωνο. Όταν ένα αρνητικό πρόσημο εμφανίζεται δίπλα στην τυπική απόκλιση, όπως στην έκφραση $\overline{X} - ½s$, το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι μισή μονάδα τυπικής απόκλισης (πάντα θετική) πρέπει να αφαιρεθεί από τον μέσο προκειμένου να βρεθεί ένα βάρος που βρίσκεται μισή τυπική απόκλιση *κάτω* από το μέσο βάρος. Πιο συγκεκριμένα, η έκφραση $\overline{X} - ½s$ μεταφράζεται σε βάρος 158 λίβρες επειδή 169,51 − ½ (23,33) = 169,51 − 11,67 = 157,83.

**Υπενθύμιση:**
*Η τιμή της τυπικής απόκλισης δεν μπορεί να είναι ποτέ αρνητική.*

**Έλεγχος προόδου *4.3** Έστω ότι η κατανομή αποτελεσμάτων IQ για όλους τους μαθητές έχει μέσο 120 και τυπική απόκλιση 15. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή λάθος;

**(α)** Όλοι οι μαθητές έχουν IQ 105 ή 135 επειδή όλοι στην κατανομή απέχουν μία τυπική απόκλιση πάνω ή κάτω από τον μέσο. Σωστό ή λάθος;

**(β)** Όλοι οι μαθητές πετυχαίνουν έναν βαθμό μεταξύ 105 και 135 επειδή όλοι βρίσκονται εντός μίας τυπικής απόκλισης δεξιά και αριστερά του μέσου. Σωστό ή λάθος;

**(γ)** Κατά μέσο όρο, οι μαθητές αποκλίνουν περίπου 15 βαθμούς δεξιά και αριστερά του μέσου. Σωστό ή λάθος;

**(δ)** Μερικοί μαθητές αποκλίνουν περισσότερο από μία τυπική απόκλιση πάνω ή κάτω από τον μέσο. Σωστό ή λάθος;
**(ε)** Όλοι οι μαθητές αποκλίνουν περισσότερο από μία τυπική απόκλιση πάνω ή κάτω από τον μέσο. Σωστό ή λάθος;
**(στ)** Το αποτέλεσμα στο τεστ IQ του Scott (150) αποκλίνει κατά δύο τυπικές αποκλίσεις πάνω από τον μέσο. Σωστό ή λάθος;
*Απαντήσεις στη σελίδα 534.*

## 4.5 Λεπτομέρειες: Τυπική απόκλιση

Όπως και με τον μέσο, οι στατιστικολόγοι διαχωρίζουν τον πληθυσμό από το δείγμα τόσο για τη διασπορά όσο και για την τυπική απόκλιση, ανάλογα με το αν τα δεδομένα θεωρούνται ολόκληρο σύνολο (πληθυσμός) ή υποσύνολο (δείγμα). Αυτή η διάκριση παρουσιάζεται εδώ και έχει πολύ μεγάλη σημασία στην επαγωγική στατιστική.

### *Άθροισμα τετραγώνων (SS)*

Για να υπολογίσουμε την τυπική απόκλιση πρέπει πρώτα να πάρουμε μια τιμή για τη διασπορά. Ο υπολογισμός της διασποράς όμως προϋποθέτει το άθροισμα των τετραγωνικών αποτελεσμάτων απόκλισης. *Το άθροισμα των τετραγωνικών αποτελεσμάτων απόκλισης, ή, πιο απλά, το* **άθροισμα τετραγώνων**, *το οποίο συμβολίζεται ως SS,* χρήζει ιδιαίτερης προσοχής επειδή αποτελεί βασικό συστατικό των υπολογισμών για τη διασπορά, όπως και για πολλά άλλα στατιστικά μέτρα. Υπάρχουν δύο τύποι για το άθροισμα τετραγώνων: ο τύπος του ορισμού, τον οποίο καταλαβαίνουμε και θυμόμαστε πιο εύκολα, και ο τύπος υπολογισμού, ο οποίος συνήθως είναι πιο αποδοτικός. Επιπλέον, θα παρουσιάσουμε εκδοχές αυτών των δύο τύπων για πληθυσμούς και για δείγματα.

***Άθροισμα τετραγώνων (SS)***
*Το άθροισμα των τετραγωνικών αποτελεσμάτων απόκλισης.*

### *Τύποι αθροίσματος τετραγώνων για πληθυσμό*

Ο τύπος ορισμού παρέχει την πιο προσβάσιμη εκδοχή του αθροίσματος τετραγώνων για πληθυσμό:

**Άθροισμα τετραγώνων (SS) για πληθυσμό (τύπος ορισμού)**

$$SS = \sum (X - \mu)^2 \qquad (4.1)$$

όπου το $SS$ αναπαριστά το άθροισμα τετραγώνων, το $\Sigma$ μας οδηγεί στη χρήση του αθροίσματος της έκφρασης δεξιά του και το $(X - \mu)^2$ συμβολίζει κάθε τετραγωνικό αποτέλεσμα απόκλισης. Διαβάζετε τον Τύπο 4.1 ως εξής: «Το άθροισμα τετραγώνων ισούται με το άθροισμα όλων των τετραγωνικών αποτελεσμάτων απόκλισης». Μπορείτε να ανακατασκευάσετε αυτόν τον τύπο αν ακολουθήσετε τα παρακάτω τρία βήματα:

1. Αφαιρείτε τον μέσο πληθυσμού, $\mu$, από κάθε αρχικό αποτέλεσμα, $X$, προκειμένου να πάρετε ένα αποτέλεσμα απόκλισης, $X - \mu$.
2. Υψώνετε κάθε αποτέλεσμα απόκλισης στο τετράγωνο, $(X - \mu)^2$, για να εξαλείψετε τα αρνητικά πρόσημα.
3. Αθροίζετε όλα τα τετραγωνικά αποτελέσματα απόκλισης, $\sum (X - \mu)^2$.

Ο Πίνακας 4.1 δείχνει πώς χρησιμοποιείται ο τύπος ορισμού για τον υπολογισμό του αθροίσματος τετραγώνων για την κατανομή Γ του Σχήματος 4.1 στη σελίδα 106. (Παραλείψτε τα δύο τελευταία βήματα του πίνακα για αργότερα, όταν θα έχουμε παρουσιάσει τύπους για τη διασπορά και την τυπική απόκλιση.)

Ο τύπος ορισμού είναι περισσότερο δύσχρηστος όταν ο μέσος ισούται με κάποιον δεκαδικό αριθμό, όπως το 169,51, όπως συμβαίνει συχνά, ή όταν ο αριθμός των αποτελεσμάτων είναι μεγάλος. Σ' αυτές τις περιπτώσεις, χρησιμοποιείτε τον πιο αποδοτικό τύπο υπολογισμού:

**Άθροισμα τετραγώνων (SS) για πληθυσμό (τύπος υπολογισμού)**

$$SS = \sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{N} \qquad (4.2)$$

**Πίνακας 4.1**
**ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΥΠΙΚΗΣ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ ΠΛΗΘΥΣΜΟΥ $\sigma$ (ΤΥΠΟΣ ΟΡΙΣΜΟΥ)**

**Α. Σειρά υπολογισμών**

Δίνετε μια τιμή στο $N$ που εκπροσωπεί τον αριθμό των αποτελεσμάτων $X$ **1**
Αθροίζετε όλα τα αποτελέσματα $X$ **2**
Παίρνετε τον μέσο αυτών των αποτελεσμάτων **3**
Αφαιρείτε τον μέσο από κάθε αποτέλεσμα $X$ για να πάρετε ένα αποτέλεσμα απόκλισης **4**
Υψώνετε στο τετράγωνο κάθε αποτέλεσμα απόκλισης **5**
Αθροίζετε όλα τα τετραγωνικά αποτελέσματα απόκλισης για να πάρετε το άθροισμα τετραγώνων **6**
Αντικαθιστάτε με αριθμούς στον τύπο για να πάρετε τη διασπορά πληθυσμού, $\sigma^2$ **7**
Υπολογίζετε την τετραγωνική ρίζα του $\sigma^2$ για να πάρετε την τυπική απόκλιση πληθυσμού, $\sigma$ **8**

**Β. Δεδομένα και πράξεις**

| | **4** | **5** |
|---|---|---|
| $X$ | $X-\mu$ | $(X-\mu)^2$ |
| 13 | 3 | 9 |
| 10 | 0 | 0 |
| 11 | 1 | 1 |
| 7 | –3 | 9 |
| 9 | –1 | 1 |
| 11 | 1 | 1 |
| 9 | –1 | 1 |

**1** $N=7$ **2** $\sum X=70$ **6** $SS=\sum(X-\mu)^2=22$

**3** $\mu=\frac{70}{7}=10$

**7** $\sigma^2=\frac{SS}{N}=\frac{22}{7}=3{,}14$ **8** $\sigma=\sqrt{\frac{SS}{N}}=\sqrt{\frac{22}{7}}=\sqrt{3{,}14}=1{,}77$

όπου το $\sum X^2$, το άθροισμα των τετραγωνικών αποτελεσμάτων $X$, λαμβάνεται *υψώνοντας στο τετράγωνο πρώτα κάθε αποτέλεσμα $X$ και αθροίζοντας έπειτα όλα τα τετραγωνικά αποτελέσματα $X$*, το $(\sum X)^2$ είναι το τετράγωνο του αθροίσματος όλων των αποτελεσμάτων $X$ και λαμβάνεται *προσθέτοντας πρώτα όλα τα αποτελέσματα $X$ και υψώνοντας έπειτα στο τετράγωνο το άθροισμα όλων των αποτελεσμάτων $X$* και το $N$ είναι το μέγεθος πληθυσμού.

Δεν θα επιχειρήσουμε να δείξουμε ότι ο τύπος υπολογισμού, με τις πιο σύνθετες εκφράσεις του, μπορεί να προκύψει με αλγεβρικό τρόπο από τον τύπο ορισμού. Ωστόσο, ο Πίνακας 4.2 επιβεβαιώνει ότι ο τύπος υπολογισμού δίνει το ίδιο άθροισμα τετραγώνων 22 για την κατανομή Γ με τον τύπο ορισμού του Πίνακα 4.1. Η εκπληκτική αποδοτικότητα του τύπου υπολογισμού γίνεται πιο προφανής όταν έχουμε να κάνουμε με μεγάλα σύνολα αποτελεσμάτων, όπως στην Ερώτηση επανάληψης 4.14.

## *Τύποι αθροίσματος τετραγώνων για δείγμα*

Ο συμβολισμός για το δείγμα μπορεί να πάρει τη θέση του συμβολισμού του πληθυσμού στους δύο πιο πάνω τύπους χωρίς να επέλθουν ουσιώδεις αλλαγές:

**Άθροισμα τετραγώνων ($SS$) για δείγμα (τύπος ορισμού)**

$$SS=\sum(X-\overline{X})^2 \qquad (4.3)$$

**(τύπος υπολογισμού)**

$$SS = \sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{n} \qquad (4.4)$$

**Πίνακας 4.2**
**ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΥΠΙΚΗΣ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ ΠΛΗΘΥΣΜΟΥ ($\sigma$) (ΤΥΠΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ)**

**Α. Σειρά υπολογισμών**

Δίνετε μια τιμή στο $N$ που εκπροσωπεί τον αριθμό των αποτελεσμάτων $X$ **1**
Αθροίζετε όλα τα αποτελέσματα $X$ **2**
Παίρνετε το άθροισμα όλων των αποτελεσμάτων $X$ **3**
Υψώνετε στο τετράγωνο κάθε αποτέλεσμα $X$ **4**
Αθροίζετε όλα τα τετραγωνικά αποτελέσματα $X$ **5**
Αντικαθιστάτε με αριθμούς στον τύπο για να πάρετε το άθροισμα τετραγώνων, $SS$ **6**
Αντικαθιστάτε με αριθμούς στον τύπο για να πάρετε τη διασπορά πληθυσμού, $\sigma^2$ **7**
Υπολογίζετε την τετραγωνική ρίζα του $\sigma^2$ για να πάρετε την τυπική απόκλιση πληθυσμού, $\sigma$ **8**

**Β. Δεδομένα και πράξεις**

| $X$ | **4**<br>$X^2$ |
|---|---|
| 13 | 169 |
| 10 | 100 |
| 11 | 121 |
| 7 | 49 |
| 9 | 81 |
| 11 | 121 |
| 9 | 81 |

**1** $N = 7$ **2** $\sum X = 70$ **5** $\sum X^2 = 722$
**3** $(\sum X)^2 = 4.900$

**6** $SS = \sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{N} = 722 - \frac{4.900}{7} = 722 - 700 = 22$

**7** $\sigma^2 = \frac{SS}{N} = \frac{22}{7} = 3{,}14$ **8** $\sigma = \sqrt{\frac{SS}{N}} = \sqrt{\frac{22}{7}} = \sqrt{3{,}14} = 1{,}77$

όπου το $\overline{X}$, ο δειγματικός μέσος, αντικαθιστά το $\mu$, τον μέσο πληθυσμού, και το $n$, το μέγεθος δείγματος, αντικαθιστά το $N$, το μέγεθος πληθυσμού. Παρά αυτές τις δύο αλλαγές στον συμβολισμό, το αριθμητικό αποτέλεσμα για το άθροισμα τετραγώνων δείγματος (22) είναι ίδιο με το αντίστοιχο για το άθροισμα τετραγώνων πληθυσμού στους Πίνακες 4.1 και 4.2. Αναλόγως, το ίδιο σύμβολο, $SS$, θα αναπαριστά το άθροισμα των τετραγωνικών αποτελεσμάτων απόκλισης τόσο για τους πληθυσμούς όσο και για τα δείγματα.

## *Τυπική απόκλιση πληθυσμού σ*

Ανακαλέστε ότι, γενικά, ένας μέσος ορίζεται ως το άθροισμα όλων των αποτελεσμάτων διά του αριθμού των αποτελεσμάτων. Επειδή η διασπορά είναι ο αριθμητικός μέσος όλων των τετραγωνικών αποτελεσμάτων απόκλισης, μπορεί να οριστεί ως το άθροισμα όλων των τετραγωνικών αποτελεσμάτων απόκλισης διά του αριθμού των αποτελεσμάτων:

$$\textit{Διασπορά} = \frac{\textit{άθροισμα όλων των τετραγωνικών αποτελεσμάτων απόκλισης}}{\textit{αριθμός αποτελεσμάτων}}$$

ή, σε σύμβολα:

**Διασπορά για πληθυσμό**

$$\sigma^2 = \frac{SS}{N} \tag{4.5}$$

**Τυπική απόκλιση πληθυσμού ($\sigma$)**
*Ένα γενικό μέτρο της μέσης ποσότητας κατά την οποία τα αποτελέσματα στον πληθυσμό αποκλίνουν αμφιπλεύρως του μέσου πληθυσμού τους.*

όπου το τετραγωνικό πεζό σίγμα, $\sigma^2$, αναπαριστά τη διασπορά πληθυσμού, το $SS$ είναι το άθροισμα των τετραγωνικών αποκλίσεων για τον πληθυσμό και $N$ είναι το μέγεθος πληθυσμού.

Για να απαλλαγείτε από τα τετράγωνα των παραπάνω μετρήσεων, υπολογίζετε την τετραγωνική ρίζα της διασποράς για να πάρετε την τυπική απόκλιση, δηλαδή

**Τυπική απόκλιση για πληθυσμό**

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{SS}{N}} \tag{4.6}$$

όπου το $\sigma$ αναπαριστά την **τυπική απόκλιση πληθυσμού** και $\sqrt{\ }$ μας οδηγεί να υπολογίσουμε την τετραγωνική ρίζα της έκφρασης, ενώ τα $SS$ και $N$ ορίζονται πιο πάνω.

Ανατρέχοντας στα δύο τελευταία βήματα του Πίνακα 4.1 ή του Πίνακα 4.2, μπορείτε να επαληθεύσετε ότι η τιμή της διασποράς, $\sigma^2$, ισούται με 3,14 για την κατανομή Γ επειδή

$$\sigma^2 = \frac{SS}{N} = \frac{22}{7} = 3{,}14$$

και ότι η τιμή της τυπικής απόκλισης, $\sigma$, ισούται με 1,77 για την κατανομή Γ επειδή

$$\sigma = \sqrt{\frac{SS}{N}} = \sqrt{\frac{22}{7}} = \sqrt{3{,}14} = 1{,}77$$

## *Τυπική απόκλιση δείγματος (s)*

Αν και το άθροισμα τετραγώνων παραμένει ουσιαστικά το ίδιο για τους πληθυσμούς και τα δείγματα, υπάρχει μια μικρή αλλά σημαντική αλλαγή στους τύπους για τη διασπορά και την τυπική απόκλιση για δείγματα. Αυτή η αλλαγή εμφανίζεται στον παρονομαστή κάθε τύπου, όπου το $N$, το μέγεθος πληθυσμού, δεν αντικαθίσταται από το $n$, το μέγεθος δείγματος, αλλά από το $n - 1$, όπως βλέπετε εδώ:

**Διασπορά για δείγμα**

$$s^2 = \frac{SS}{n-1} \tag{4.7}$$

**Τυπική απόκλιση για δείγμα**

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{SS}{n-1}} \tag{4.8}$$

**Τυπική απόκλιση δείγματος (s)**
*Ένα γενικό μέτρο της μέσης ποσότητας κατά την οποία τα αποτελέσματα αποκλίνουν αμφιπλεύρως του δειγματικού μέσου.*

όπου τα $s^2$ και $s$ εκπροσωπούν τη διασπορά δείγματος και την **τυπική απόκλιση δείγματος**, το *SS* είναι το άθροισμα τετραγώνων για το δείγμα, όπως ορίζεται στον Τύπο 4.3 ή στον Τύπο 4.4, και *n* είναι το μέγεθος δείγματος.[14]

Θα εξηγήσουμε στην επόμενη υποενότητα γιατί χρησιμοποιούμε το $n-1$. Αλλά πρώτα θα αφιερώσουμε λίγη ώρα στη μελέτη των Πινάκων 4.3 και 4.4, όπου παρουσιάζονται οι πράξεις για την τυπική απόκλιση δείγματος με τους τύπους ορισμού και υπολογισμού για αθροίσματα τετραγώνων δειγμάτων και ένα νέο σύνολο πέντε αποτελεσμάτων. Παρατηρήστε ότι, εκτός από τις αλλαγές στον συμβολισμό και τον μικρότερο ($n-1$) παρονομαστή, οι πράξεις που γίνονται για την τυπική απόκλιση δείγματος στους Πίνακες 4.3 και 4.4 είναι ίδιες με εκείνες που χρησιμοποιήσαμε για την τυπική απόκλιση πληθυσμού στους Πίνακες 4.1 και 4.2.

**Υπενθύμιση:**
*Αντικαθιστάτε το n με το n − 1 μόνο όταν διαιρείτε το SS για να πάρετε τα $s^2$ και s.*

## *Έλεγχος πράξεων*

Με σπάνιες εξαιρέσεις, η τυπική απόκλιση θα πρέπει να είναι μικρότερη από το μισό μέγεθος του εύρους, και στις περισσότερες περιπτώσεις θα είναι ένα ακόμα μικρότερο κλάσμα (ένα τρίτο ως ένα έκτο) του μεγέθους του εύρους. Χρησιμοποιήστε αυτόν τον πρακτικό κανόνα για να εντοπίζετε μεγάλα λάθη στις πράξεις. Η μοναδική ασφαλής μέθοδος για τον εντοπισμό μικρότερων λαθών –είτε υπολογίζετε την τυπική απόκλιση χειροκίνητα είτε με τη χρήση Η/Υ ή αριθμομηχανής– είναι να υπολογίζετε τα πάντα δύο φορές και να προχωράτε μόνο αν τα αριθμητικά αποτελέσματά σας συμφωνούν.

**Πίνακας 4.3**
**ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΥΠΙΚΗΣ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ ΔΕΙΓΜΑΤΟΣ (*S*) (ΤΥΠΟΣ ΟΡΙΣΜΟΥ)**

**Α. Σειρά υπολογισμών**

Δίνετε μια τιμή στο *n* που εκπροσωπεί τον αριθμό των αποτελεσμάτων *X* **1**
Αθροίζετε όλα τα αποτελέσματα *X* **2**
Παίρνετε τον μέσο αυτών των αποτελεσμάτων *X* **3**
Αφαιρείτε τον μέσο από κάθε αποτέλεσμα *X* για να πάρετε ένα αποτέλεσμα απόκλισης **4**
Υψώνετε στο τετράγωνο κάθε αποτέλεσμα απόκλισης **5**
Αθροίζετε όλα τα τετραγωνικά αποτελέσματα απόκλισης για να πάρετε το άθροισμα τετραγώνων **6**
Αντικαθιστάτε με αριθμούς στον τύπο για να πάρετε τη διασπορά δείγματος, $s^2$ **7**
Υπολογίζετε την τετραγωνική ρίζα του $s^2$ για να πάρετε την τυπική απόκλιση δείγματος, *s* **8**

**Β. Δεδομένα και πράξεις**

| | **4** | **5** |
|---|---|---|
| $X$ | $X-\overline{X}$ | $(X-\overline{X})^2$ |
| 7 | 4 | 16 |
| 3 | 0 | 0 |
| 1 | –2 | 4 |
| 0 | –3 | 9 |
| 4 | 1 | 1 |

**1** $n = 5$ **2** $\Sigma X = 15$ **6** $SS = \Sigma(X-\overline{X})^2 = 30$

**3** $\overline{X} = \frac{15}{5} = 3$

**7** $s^2 = \frac{SS}{n-1} = \frac{30}{4} = 7{,}50$ **8** $s = \sqrt{\frac{SS}{n-1}} = \sqrt{\frac{30}{4}} = \sqrt{7{,}50} = 2{,}74$

14. Σύμφωνα με το *Publication Manual of the American Psychological Association*, οι συντάκτες των αναφορών ερευνών ψυχολογίας συμβολίζουν συχνά την τυπική απόκλιση δείγματος ως *SD* αντί για *s* και τον δειγματικό μέσο ως *M* αντί για $\overline{X}$. Εμείς ωστόσο θα συνεχίσουμε να χρησιμοποιούμε τα *s* και $\overline{X}$, δηλαδή τους τυπικούς συμβολισμούς στα περισσότερα βιβλία στατιστικής.

**Έλεγχος προόδου *4.4** Χρησιμοποιώντας τον τύπο του ορισμού για το άθροισμα τετραγώνων, υπολογίστε την τυπική απόκλιση δείγματος για τα παρακάτω τέσσερα αποτελέσματα: 1, 3, 4, 4.

**Πίνακας 4.4**
**ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΥΠΙΚΗΣ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ ΔΕΙΓΜΑΤΟΣ *S* (ΤΥΠΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ)**

**Α. Σειρά υπολογισμών**

Δίνετε μια τιμή στο *n* που εκπροσωπεί τον αριθμό των αποτελεσμάτων *X* **1**
Αθροίζετε όλα τα αποτελέσματα *X* **2**
Υψώνετε στο τετράγωνο το άθροισμα όλων των αποτελεσμάτων *X* **3**
Υψώνετε στο τετράγωνο κάθε αποτέλεσμα *X* **4**
Αθροίζετε όλα τα τετραγωνικά αποτελέσματα *X* **5**
Αντικαθιστάτε με αριθμούς στον τύπο για να πάρετε το άθροισμα τετραγώνων, *SS* **6**
Αντικαθιστάτε με αριθμούς στον τύπο για να πάρετε τη διασπορά δείγματος, $s^2$ **7**
Υπολογίζετε την τετραγωνική ρίζα του $s^2$ για να πάρετε την τυπική απόκλιση δείγματος, *s* **8**

**Β. Δεδομένα και πράξεις**

| $X$ | **4**<br>$X^2$ |
|---|---|
| 7 | 49 |
| 3 | 9 |
| 1 | 1 |
| 0 | 0 |
| 4 | 16 |

**1** $N = 5$ **2** $\sum X = 15$ **5** $\sum X^2 = 75$

**3** $(\sum X)^2 = 225$

**6** $SS = \sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{n} = 75 - \frac{225}{5} = 75 - 45 = 30$

**7** $s^2 = \frac{SS}{n-1} = \frac{30}{4} = 7{,}50$ **8** $\sigma = \sqrt{\frac{SS}{n-1}} = \sqrt{\frac{30}{4}} = \sqrt{7{,}50} = 1{,}77$

**Έλεγχος προόδου *4.5** Χρησιμοποιώντας τον τύπο του υπολογισμού για το άθροισμα τετραγώνων, υπολογίστε την τυπική απόκλιση πληθυσμού για τα αποτελέσματα στο (α) και την τυπική απόκλιση δείγματος για τα αποτελέσματα στο (β).
**(α)** 1, 3, 7, 2, 0, 4, 7, 3 **(β)** 10, 8, 5, 0, 1, 1, 7, 9, 2

**Έλεγχος προόδου *4.6** Οι ημέρες απουσίας από το σχολείο για ένα δείγμα 10 μαθητών της πρώτης δημοτικού είναι: 8, 5, 7, 1, 4, 0, 5, 7, 2, 9.
**(α)** Πριν υπολογίσετε την τυπική απόκλιση, αποφασίστε αν θα ήταν πιο αποδοτικός ο τύπος του ορισμού ή ο τύπος του υπολογισμού. Γιατί;
**(β)** Χρησιμοποιήστε τον πιο αποδοτικό τύπο για να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση δείγματος.
*Απαντήσεις στις σελίδες 534-535.*

## *Γιατί n – 1;*

Η χρήση του *n* – 1 στον παρονομαστή των Τύπων 4.7 και 4.8 λύνει ένα πρόβλημα στην επαγωγική στατιστική που συσχετίζεται με γενικεύσεις από δείγματα σε πληθυσμούς. Η ακρίβεια αυτών των γενικεύσεων συνήθως εξαρτάται από την *ακριβή* εκτίμηση άγνωστης μεταβλητότητας στον πληθυσμό με τη γνωστή μεταβλητότητα στο δείγμα. Αλλά αν έπρεπε να χρησιμοποιήσουμε το *n* αντί για το *n* – 1 στον παρονομαστή των εκτιμήσεών μας, αυτές θα παρουσίαζαν μια τάση να υποεκτιμούν τη μεταβλητότητα στον πληθυσμό, επειδή το *n* είναι πολύ με-

**Πίνακας 4.5**
**ΔΥΟ ΕΚΤΙΜΗΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑΣ ΠΛΗΘΥΣΜΟΥ**

| Όταν το $\mu$ είναι άγνωστο $(\overline{X} = 3)$ | | | Όταν το $\mu$ είναι γνωστό $(\mu = 2)$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | $X-\overline{X}$ | $(X-\overline{X})^2$ | $X$ | $X-\mu$ | $(X-\mu)^2$ |
| 7 | $7-3=4$ | 16 | 7 | $7-2=5$ | 25 |
| 3 | $3-3=0$ | 0 | 3 | $3-2=1$ | 1 |
| 1 | $1-3=-2$ | 4 | 1 | $1-2=-1$ | 1 |
| 0 | $0-3=-3$ | 9 | 0 | $0-2=-2$ | 4 |
| 4 | $4-3=1$ | 1 | 4 | $4-2=2$ | 4 |
| | $\Sigma(X-\overline{X}) = 0$ | $\Sigma(X-\overline{X})^2 = 30$ | | $\Sigma(X-\mu) = 5$ | $\Sigma(X-\mu)^2 = 35$ |
| | $df = n-1 = 5-1 = 4$ | | | $df = n = 5$ | |
| | $s^2(df = n-1) = \dfrac{\sum(X-\overline{X})}{n-1} = \dfrac{30}{4} = 7{,}50$ | | | $s^2(df = n) = \dfrac{\sum(X-\mu)^2}{n} = \dfrac{35}{5} = 7{,}00$ | |

γάλο. Αυτή η τάση θα έθετε υπό αμφισβήτηση τις επόμενες γενικεύσεις, όπως το αν οι παρατηρούμενες μέσες διαφορές θα ήταν πραγματικές ή παροδικές. Από την άλλη πλευρά, όταν ο παρονομαστής μικραίνει καθώς χρησιμοποιείται το $n-1$, η μεταβλητότητα στον πληθυσμό εκτιμάται με μεγαλύτερη ακρίβεια και, κατά συνέπεια, οι επόμενες γενικεύσεις έχουν περισσότερες πιθανότητες να είναι έγκυρες.

Θα υποθέσουμε ότι τα πέντε αποτελέσματα (7, 3, 1, 0, 4) στον Πίνακα 4.3 είναι ένα τυχαίο δείγμα από κάποιον πληθυσμό του οποίου η άγνωστη μεταβλητότητα πρέπει να εκτιμηθεί με τη μεταβλητότητα του δείγματος. Για να καταλάβετε γιατί το $n-1$ λειτουργεί θα πρέπει να εξετάσετε καλύτερα τα αποτελέσματα απόκλισης. Ο Τύπος 4.3, ο τύπος του ορισμού για το άθροισμα τετραγώνων δείγματος, καθορίζει ότι καθένα από τα πέντε αρχικά αποτελέσματα, $X$, θα εκφράζεται ως θετική ή αρνητική απόκλιση από τον δειγματικό μέσο, $\overline{X}$, 3. Σ' αυτό το σημείο, ένας σύνθετος μαθηματικός περιορισμός προκαλεί επιπλοκές. Ισχύει πάντα, όπως βλέπετε στην αριστερή πλευρά του Πίνακα 4.5, ότι *το άθροισμα όλων των αποτελεσμάτων, όταν εκφράζονται ως αποκλίσεις από τον μέσο τους, ισούται με μηδέν.* (Αν δεν είστε βέβαιοι, θυμηθείτε όσα είπαμε στη σελίδα 94 για τον μέσο ως σημείο ισορροπίας που εξισώνει τα αθροίσματα όλων των θετικών και αρνητικών αποκλίσεων.) Δεδομένων των τιμών για *οποιεσδήποτε* τέσσερις από τις πέντε αποκλίσεις στην αριστερή πλευρά του Πίνακα 4.5, η τιμή της εναπομείνασας απόκλισης μπορεί να μεταβάλλεται ελεύθερα. Αντίθετα, η τιμή της είναι απολύτως σταθερή, επειδή πρέπει να τηρεί τον μαθηματικό περιορισμό ότι το άθροισμα όλων των αποκλίσεων από *τον μέσο τους* ισούται με μηδέν. Για παράδειγμα, δεδομένου του αθροίσματος για τις τέσσερις πρώτες αποκλίσεις στην αριστερή πλευρά του Πίνακα 4.5, δηλαδή $[4 + 0 + (-2) + (-3) = -1]$, η τιμή της κάτω απόκλισης πρέπει να ισούται με 1, όπως και ισούται, εξαιτίας του περιορισμού του μηδενικού αθροίσματος, δηλαδή $[-1 + 1 = 0]$. Επειδή αυτός ο μαθηματικός περιορισμός ισχύει για *οποιεσδήποτε* τέσσερις από τις πέντε αποκλίσεις, δεδομένου του αθροίσματος των τεσσάρων τελευταίων αποκλίσεων στον Πίνακα 4.5, δηλαδή $[0 + (-2) + (-3) + 1 = -4]$, η τιμή της πρώτης απόκλισης πρέπει να ισούται με 4 επειδή $[-4 + 4 = 0]$.

## *Αν το μ είναι γνωστό*

Για τη διευκόλυνση της παρούσας συζήτησης, θα θεωρήσουμε ότι γνωρίζουμε την τιμή του μέσου πληθυσμού, $\mu$, και έστω ότι ισούται με 2. (Οποιαδήποτε τιμή που δίνεται στο $\mu$ εκτός από 3, την τιμή του $X$, θα ικανοποιούσε το συγκεκριμένο επιχείρημα. Είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι οι τιμές των $\mu$ και $X$ θα διαφέρουν επειδή το γεγονός ότι ένα τυχαίο δείγμα είναι ακριβώς ίδιο με τον πληθυσμό του είναι σπάνιο ή δεν συμβαίνει ποτέ.) Επιπλέον, θα θεωρήσουμε ότι λαμβάνουμε ένα τυχαίο δείγμα $n = 5$ αποτελεσμάτων αποκλίσεων από τον πληθυσμό μας, έστω $X - \mu$. Τότε αυτά τα πέντε γνωστά αποτελέσματα απόκλισης θα αποτελούν την αρχική βάση για την εκτίμηση της άγνωστης μεταβλητότητας στον πληθυσμό. Όπως μπορείτε να δείτε στη δεξιά πλευρά του Πίνακα 4.5, το άθροισμα των πέντε αποκλίσεων από το $\mu$, δηλαδή $[5 + 1 + (-1) + (-2) + 2]$, δεν ισούται με 0 αλλά με 5. Ο περιορισμός του μηδενικού αθροίσματος ισχύει μόνο αν οι πέντε αποκλίσεις εκφράζονται γύρω από *τον δικό τους μέ-*

σο – δηλαδή τον δειγματικό μέσο, $\overline{X}$, που είναι 3. Δεν ισχύει όταν οι πέντε αποκλίσεις εκφράζονται γύρω από *κάποιον άλλον* μέσο, όπως είναι ο μέσος πληθυσμού, $\mu$, που είναι 2 για όλο τον πληθυσμό. Σ' αυτήν την περίπτωση, επειδή και οι πέντε αποκλίσεις μπορούν να μεταβάλλονται ελεύθερα, *καθεμία* παρέχει έγκυρες πληροφορίες για τη μεταβλητότητα στον πληθυσμό. Επομένως, όταν υπολογίζετε τη διασπορά δείγματος με βάση ένα τυχαίο δείγμα των πέντε αποτελεσμάτων απόκλισης πληθυσμού, $X - \mu$, είναι απαραίτητο να διαιρέσετε το δείγμα του αθροίσματος τετραγώνων με το $n$, που είναι 5, όπως βλέπετε στη δεξιά πλευρά του Πίνακα 4.5.

### *Αν το μ είναι άγνωστο*

Θα ήταν πιο αποδοτικό αν, όπως παραπάνω, μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε ένα τυχαίο δείγμα $n$ αποκλίσεων που εκφράζονται γύρω από τον μέσο πληθυσμού, $X - \mu$, για να εκτιμήσουμε τη μεταβλητότητα στον πληθυσμό. Αλλά αυτό συνήθως είναι αδύνατο, επειδή στην πραγματικότητα ο μέσος πληθυσμού είναι άγνωστος. Επομένως, πρέπει να αντικαταστήσουμε τον γνωστό δειγματικό μέσο, $\overline{X}$, με τον άγνωστο μέσο πληθυσμού, $\mu$, και πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ένα τυχαίο δείγμα $n$ αποκλίσεων όπως εκφράζονται γύρω από τον δικό τους δειγματικό μέσο, $X - \overline{X}$, για να εκτιμήσουμε τη μεταβλητότητα στον πληθυσμό. Αν και υπάρχουν $n = 5$ αποκλίσεις στο δείγμα, μόνο οι $n - 1 = 4$ αυτών μπορούν να μεταβάλλονται ελεύθερα, επειδή το άθροισμα των $n = 5$ αποκλίσεων από *τον δικό τους δειγματικό μέσο* ισούται πάντα με μηδέν.

Μόνο οι $n - 1$ αποκλίσεις δείγματος δίνουν έγκυρες πληροφορίες για την εκτίμηση της μεταβλητότητας. Ένα μέρος των έγκυρων πληροφοριών έχει χαθεί εξαιτίας του περιορισμού μηδενικού αθροίσματος όταν ο δειγματικός μέσος αντικαθιστά τον μέσο πληθυσμού. Και γι' αυτόν τον λόγο διαιρούμε το άθροισμα τετραγώνων για το $X - \overline{X}$ διά $n - 1$, όπως στην αριστερή πλευρά του Πίνακα 4.5.

## 4.6 Βαθμοί ελευθερίας (*df*)

Η συζήτησή μας περιστρέφεται ουσιαστικά γύρω από μια πολύ σημαντική έννοια στην επαγωγική στατιστική, τους βαθμούς ελευθερίας.

**Οι *βαθμοί ελευθερίας* (*df*) είναι ο αριθμός των τιμών που μεταβάλλονται ελεύθερα, όταν έχουμε έναν ή περισσότερους μαθηματικούς περιορισμούς, σε ένα δείγμα που χρησιμοποιείται για την *εκτίμηση* ενός χαρακτηριστικού του πληθυσμού.**

***Βαθμοί ελευθερίας (df)***
*Ο αριθμός των τιμών που μεταβάλλονται ελεύθερα, όταν έχουμε έναν ή περισσότερους μαθηματικούς περιορισμούς.*

Η έννοια των βαθμών ελευθερίας παρουσιάζεται μόνο επειδή χρησιμοποιούμε αποτελέσματα (συνεπώς τιμές) ενός δείγματος για να *εκτιμήσουμε* κάποιο άγνωστο χαρακτηριστικό του πληθυσμού. Θεωρητικά, όταν χρησιμοποιούνται ως εκτίμηση, δεν μεταβάλλονται ελεύθερα όλες οι παρατηρούμενες τιμές στο δείγμα, εξαιτίας ενός ή περισσότερων μαθηματικών περιορισμών. Όπως έχουμε αναφέρει, όταν χρησιμοποιούνται $n$ αποκλίσεις γύρω από τον δειγματικό μέσο για την εκτίμηση της μεταβλητότητας στον πληθυσμό, μόνο οι $n - 1$ μπορούν να μεταβάλλονται ελεύθερα. Κατά συνέπεια, υπάρχουν μόνο $n - 1$ βαθμοί ελευθερίας, δηλαδή $df = n - 1$. Ένας $df$ χάνεται εξαιτίας του περιορισμού μηδενικού αθροίσματος.

Αν γινόταν διαίρεση του αθροίσματος τετραγώνων δείγματος διά του $n$, θα έτεινε να υποεκτιμά τη μεταβλητότητα στον πληθυσμό. (Στον Πίνακα 4.5, όταν το $\mu$ είναι άγνωστο, η διαίρεση διά $n$ αντί για $n - 1$ θα έδινε μικρότερη εκτίμηση (6,00 αντί 7,50.) Αυτό θα ήταν το αποτέλεσμα της ύπαρξης μόνο $n - 1$ ανεξάρτητων αποκλίσεων (εκτιμήσεις μεταβλητότητας) στο άθροισμα τετραγώνων δείγματος. Παίρνουμε μια πιο ακριβή εκτίμηση όταν ο παρονομαστής αναπαριστά τον αριθμό των ανεξάρτητων αποκλίσεων –δηλαδή τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας– στον αριθμητή, όπως στους τύπους για τα $s^2$ και $s$. Μπορούμε μάλιστα να χρησιμοποιήσουμε τους βαθμούς ελευθερίας για να γράψουμε ξανά τους τύπους για τη διασπορά δείγματος και την τυπική απόκλιση:

**Διασπορά για δείγμα**

$$s^2 = \frac{SS}{n-1} = \frac{SS}{df} \tag{4.9}$$

**Τυπική απόκλιση για δείγμα**

$$s = \sqrt{\frac{SS}{n-1}} = \sqrt{\frac{SS}{df}} \tag{4.10}$$

όπου τα $s^2$ και $s$ αναπαριστούν τη διασπορά δείγματος και την τυπική απόκλιση, το $SS$ είναι το άθροισμα τετραγώνων που ορίζεται σε έναν από τους Τύπους 4.3 ή 4.4 και το $df$ είναι οι βαθμοί ελευθερίας και ισούται με $n-1$.

### *Άλλοι μαθηματικοί περιορισμοί*

Η έννοια των βαθμών ελευθερίας χρησιμοποιείται εκτενώς στην επαγωγική στατιστική. Θα συναντήσουμε κι άλλους μαθηματικούς περιορισμούς και μερικές φορές θα χάνονται περισσότεροι από ένας βαθμοί ελευθερίας. Σε κάθε περίπτωση όμως, οι βαθμοί ελευθερίας ($df$) δείχνουν πάντα τον αριθμό των τιμών που μεταβάλλονται ελεύθερα, δεδομένων ενός ή περισσότερων μαθηματικών περιορισμών, σε ένα σύνολο τιμών που χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση κάποιου άγνωστου χαρακτηριστικού του πληθυσμού.

**Έλεγχος προόδου *4.7** Ως ένα πρώτο βήμα για την αλλαγή των συνηθειών του στο διάβασμα, ο Φίλιπ διατηρεί καθημερινά ένα αρχείο για τις ώρες μελέτης του.

**(α)** Κατά τη διάρκεια των δύο πρώτων εβδομάδων, ο μέσος χρόνος μελέτης του Φίλιπ ισούται με 20 ώρες ανά εβδομάδα. Αν διάβαζε 22 ώρες κατά την πρώτη εβδομάδα, πόσες ώρες θα μελετούσε τη δεύτερη εβδομάδα;

**(β)** Κατά τη διάρκεια των τεσσάρων πρώτων εβδομάδων, ο μέσος χρόνος μελέτης του Φίλιπ ισούται με 21 ώρες. Αν διάβαζε 22, 18 και 21 ώρες την πρώτη, τη δεύτερη και την τρίτη εβδομάδα αντίστοιχα, πόσες ώρες θα μελετούσε την τέταρτη εβδομάδα;

**(γ)** Αν χρησιμοποιηθούν οι πληροφορίες των (α) και (β) για την εκτίμηση κάποιου άγνωστου χαρακτηριστικού του πληθυσμού, μπορεί να εφαρμοστεί η έννοια των βαθμών ελευθερίας. Πόσοι βαθμοί ελευθερίας συσχετίζονται με τα (α) και (β);

**(δ)** Περιγράψτε τον μαθηματικό περιορισμό που προκαλεί απώλεια βαθμών ελευθερίας στα (α) και (β).

*Απαντήσεις στη σελίδα 535.*

## 4.7 Ενδοτεταρτομοριακό εύρος (IQR)

***Ενδοτεταρτομοριακό εύρος (IQR)***
*Το εύρος για το μεσαίο 50% των αποτελεσμάτων.*

Το πιο σημαντικό παρελκόμενο αποτέλεσμα του εύρους, το **ενδοτεταρτομοριακό εύρος (IQR)**, *είναι απλώς το εύρος για το μεσαίο 50% των αποτελεσμάτων.* Πιο συγκεκριμένα, το IQR ισούται με την απόσταση μεταξύ του τρίτου τεταρτημορίου (ή του 75ου εκατοστημορίου) και του πρώτου τεταρτημορίου (ή του 25ου εκατοστημορίου), δηλαδή αφού το υψηλότερο τέταρτο (αλλιώς, το επάνω 25%) και το χαμηλότερο τέταρτο (αλλιώς, το κάτω 25%) αφαιρεθούν από το αρχικό σύνολο αποτελεσμάτων. Επειδή οι περισσότερες κατανομές «απλώνονται» σε μεγαλύτερο εύρος στα άκρα τους απ' ό,τι στο κέντρο, το IQR τείνει να είναι μικρότερο από το μισό μέγεθος του εύρους.

Ο υπολογισμός του IQR είναι σχετικά εύκολος, όπως μπορείτε να δείτε αν μελετήσετε τον Πίνακα 4.6. Αυτός ο πίνακας δείχνει ότι το IQR ισούται με 2 για την κατανομή Γ (7, 9, 9, 10, 11, 11, 13) του Σχήματος 4.1.

### *Δεν είναι ευαίσθητο σε ακραία αποτελέσματα*

Μια σημαντική ιδιότητα του IQR είναι η ανθεκτικότητά του στην πιθανή στρέβλωση λόγω της ύπαρξης ακραίων τιμών. Για παράδειγμα, αν τη θέση του μικρότερου αποτελέσματος (7) στην κατανομή Γ του Σχήματος 4.1 έπαιρνε ένα πολύ μικρότερο αποτέλεσμα (για παράδειγμα, 1), η τιμή του IQR θα παρέμενε ίδια (2), αν και η τιμή του αρχικού εύρους (6) θα ήταν μεγαλύτερη (12). Κατά συνέπεια, αν ανησυχείτε για πιθανές παραμορφώσεις που προκαλούνται από ακραία αποτελέσματα ή ακραίες παρατηρήσεις, χρησιμοποιείτε το IQR ως μέτρο μεταβλητότητας, μαζί με τη διάμεσο (το δεύτερο τεταρτημόριο) ως μέτρο κεντρικής τάσης.

**Πίνακας 4.6**
**ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΓΙΑ ΤΟ IQR**

**Α. Οδηγίες**

1 Ταξινομήστε τα αποτελέσματα από το μικρότερο στο μεγαλύτερο.
2 Για να υπολογίσετε από ποιον αριθμό θα ξεκινήστε στο σύνολο των ταξινομημένων αποτελεσμάτων, ξεκινήστε από ένα από τα δύο άκρα, προσθέστε 1 στον συνολικό αριθμό αποτελεσμάτων και διαιρέστε διά 4. Αν χρειαστεί, στρογγυλοποιήστε το αποτέλεσμα στον εγγύτερο ακέραιο αριθμό.
3 Ξεκινώντας από το μεγαλύτερο αποτέλεσμα, μετρήστε τον αριθμό των βημάτων (υπολογίζονται στο βήμα 2) στα ταξινομημένα αποτελέσματα που απαιτούνται για να βρεθεί η θέση του τρίτου τεταρτημορίου.
4 Το τρίτο τεταρτημόριο ισούται με την τιμή του αποτελέσματος στη συγκεκριμένη θέση.
5 Ξεκινώντας από το μικρότερο αποτέλεσμα, μετρήστε ξανά τον αριθμό των βημάτων στα ταξινομημένα αποτελέσματα που απαιτούνται για να βρεθεί η θέση του πρώτου τεταρτημορίου.
6 Το πρώτο τεταρτημόριο ισούται με την τιμή του αποτελέσματος στη συγκεκριμένη θέση.
7 Το IQR ισούται με το τρίτο τεταρτημόριο μείον το πρώτο τεταρτημόριο.

**Β. Παράδειγμα**

1 7, 9, 9, 10, 11, 11, 13
2 $(7+1)/4=2$
3 7, 9, 9, 10, 11, 11, 13
↑
2 1
4 τρίτο τεταρτημόριο = 11
5 7, 9, 9, 10, 11, 11, 13
↑
1 2
6 πρώτο τεταρτημόριο = 9
7 $IQR=11-9=2$

**Έλεγχος προόδου *4.8** Βρείτε τις τιμές του εύρους και το IQR για τα παρακάτω σύνολα δεδομένων.
**(α)** Ηλικίες συνταξιοδότησης: 60, 63, 45, 63, 65, 70, 55, 63, 60, 65, 63
**(β)** Αλλαγές κατοικίας: 1, 3, 4, 1, 0, 2, 5, 8, 0, 2, 3, 4, 7, 11, 0, 2, 3, 4
*Απαντήσεις στη σελίδα 535.*

## 4.8 Μέτρα μεταβλητότητας για ποιοτικά και διατεταγμένα δεδομένα

### *Ποιοτικά δεδομένα*

Τα μέτρα μεταβλητότητας ουσιαστικά δεν υπάρχουν συγκεκριμένα μόνο για ποιοτικά ή μόνο για ονομαστικά δεδομένα. Θα αρκούσε πιθανώς να σημειώσουμε αν τα αποτελέσματά μας ισοκατανέμονται στις διάφορες κλάσεις (μέγιστη μεταβλητότητα), δεν ισοκατανέμονται στις διάφορες κλάσεις (μεσαία μεταβλητότητα) ή επικεντρώνονται κυρίως σε μία κλάση (ελάχιστη μεταβλητότητα). Για παράδειγμα, αν η σύνθεση σε διαφορετικές εθνότητες των κατοίκων μιας πόλης ισοκατανέμεται (περίπου) σε αρκετές ομάδες, η μεταβλητότητα ως προς τις εθνικές ομάδες είναι μέγιστη και υπάρχει σημαντική ετερογένεια. (Μια εξέταση των δεδομένων για τον πληθυσμό κομητειών από την απογραφή του 2010 στις ΗΠΑ, η οποία διατίθεται στη σελίδα http://factfinder.census.gov, αποκαλύπτει ότι η μεγαλύτερη εθνική μεταβλητότητα παρατηρείται σε μεγάλες αστικές κομητείες, όπως στην κομητεία του Μπρονξ στη Νέα Υόρκη και στην κομητεία του Σαν Φρανσίσκο στην Καλιφόρνια.) Στο άλλο άκρο, όταν σχεδόν όλοι οι κάτοικοι ανήκουν σε μία μόνο εθνική ομάδα, η μεταβλητότητα θα είναι ελάχιστη και η ετερογένεια θα είναι μικρή. (Σύμφωνα με την προηγούμενη πηγή, δεν υπάρχει σχεδόν καμία εθνική μεταβλητότητα σε αραιοκατοικημένες αγροτικές κομητείες, όπως στην κομητεία Χούκερ της Νεμπράσκα και στην κομητεία Κινγκ του

Τέξας, όπου κατοικούν σχεδόν αποκλειστικά λευκοί.) Αν η εθνική σύνθεση βρίσκεται κάπου ανάμεσα σ' αυτά τα δύο άκρα –εξαιτίας της άνισης κατανομής μεταξύ μεγάλων εθνικών ομάδων–, η μεταβλητότητα θα είναι μεσαία, όπως συμβαίνει σε πολλές πόλεις και κομητείες των ΗΠΑ.

### *Ταξινομημένα ποιοτικά και διατεταγμένα δεδομένα*

Αν τα ποιοτικά δεδομένα μπορούν να ταξινομηθούν επειδή η μέτρηση είναι διατάξιμη (ή αν τα δεδομένα είναι διατεταγμένα), τότε θα μπορούσαμε να περιγράψουμε τη μεταβλητότητα αναγνωρίζοντας τα ακραία αποτελέσματα (ή τις ακραίες κατατάξεις). Για παράδειγμα, μια λέσχη αξιωματικών δεν θα μπορούσε να περιλαμβάνει αξιωματικούς με βαθμό κάτω από υπολοχαγό ή πάνω από ταξίαρχο.

## *Περίληψη*

Τα μέτρα μεταβλητότητας εκφράζουν την ποσότητα κατά την οποία οι παρατηρήσεις «διασπείρονται ή εξαπλώνονται» σε μια κατανομή. Αυτά τα μέτρα παίζουν σημαντικό ρόλο στην ανάλυση αποτελεσμάτων έρευνας.

Το απλούστερο μέτρο μεταβλητότητας, το εύρος, υπολογίζεται και γίνεται εύκολα κατανοητό, αλλά παρουσιάζει δύο μειονεκτήματα.

Μεταξύ των μέτρων μεταβλητότητας, η διασπορά και ιδιαίτερα η τυπική απόκλιση καταλαμβάνουν την ίδια σημαντική θέση με τον αριθμητικό μέσο μεταξύ των μέτρων κεντρικής τάσης.

Η διασπορά είναι ένας τύπος μέσου, και πιο συγκεκριμένα, ο αριθμητικός μέσος όλων των τετραγωνικών αποκλίσεων γύρω από τον μέσο τους. Προκειμένου να αποφύγουμε «περίεργες» τετραγωνικές μονάδες μέτρησης, παίρνουμε την τετραγωνική ρίζα της διασποράς για να καταλήξουμε στην τυπική απόκλιση.

Η τυπική απόκλιση είναι ένα γενικό μέτρο της μέσης ή τυπικής ποσότητας κατά την οποία τα αποτελέσματα αποκλίνουν αμφιπλεύρως του μέσου τους.

Για τις περισσότερες κατανομές συχνοτήτων, η πλειοψηφία όλων των αποτελεσμάτων βρίσκεται εντός μίας τυπικής απόκλισης του μέσου τους και μια μικρή μειοψηφία όλων των αποτελεσμάτων αποκλίνει περισσότερο από δύο τυπικές αποκλίσεις αμφιπλεύρως του μέσου τους.

Αντίθετα από τον μέσο, ο οποίος είναι ένα μέτρο θέσης, η τυπική απόκλιση είναι ένα μέτρο απόστασης.

Ο υπολογισμός είτε της τυπικής απόκλισης πληθυσμού ($\sigma$) είτε της τυπικής απόκλισης δείγματος ($s$) απαιτεί τρία βήματα:

1. Υπολογίζετε το άθροισμα όλων των τετραγωνικών αποτελεσμάτων απόκλισης (*SS*) χρησιμοποιώντας είτε τον ορισμό είτε τον τύπο υπολογισμού.
2. Διαιρείτε το *SS* διά $N$, το μέγεθος του πληθυσμού, για να πάρετε τη διασπορά πληθυσμού ($\sigma^2$), ή διαιρείτε το *SS* διά $n - 1$, το μέγεθος του δείγματος μείον 1, για να πάρετε τη διασπορά δείγματος ($s^2$).
3. Χρησιμοποιείτε την τετραγωνική ρίζα της διασποράς για να πάρετε την τυπική απόκλιση πληθυσμού ($\sigma$) ή την τυπική απόκλιση δείγματος ($s$).

Ο παρονομαστής των τύπων για τη διασπορά δείγματος και την τυπική απόκλιση εκφράζει το γεγονός ότι, εξαιτίας του περιορισμού του μηδενικού αθροίσματος, μόνο $n - 1$ των αποτελεσμάτων απόκλισης δείγματος παρέχουν έγκυρες εκτιμήσεις της μεταβλητότητας του πληθυσμού.

Κάθε φορά που εκτιμούμε χαρακτηριστικά πληθυσμού, πρέπει να ενδιαφερόμαστε για τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας (*df*) που σχετίζονται με την εκτίμησή μας. Οι βαθμοί ελευθερίας καθορίζουν τον αριθμό των τιμών που μπορούν να διαφέρουν ελεύθερα, με δεδομένους έναν ή περισσότερους μαθηματικούς περιορισμούς. Όταν εκτιμούμε τη διασπορά πληθυσμού και την τυπική απόκλιση, οι βαθμοί ελευθερίας ισούνται με $n - 1$.

Το ενδοτεταρτομοριακό εύρος (IQR) είναι ανθεκτικό στις παραμορφωτικές επιδράσεις των ακραίων αποτελεσμάτων.

Τα μέτρα μεταβλητότητας ουσιαστικά δεν υπάρχουν για ποιοτικά και διατεταγμένα δεδομένα.

## *Σημαντικοί όροι*

Μέτρα μεταβλητότητας
Εύρος
Διασπορά
Τυπική απόκλιση
Άθροισμα τετραγώνων (*SS*)
Τυπική απόκλιση πληθυσμού ($\sigma$)
Τυπική απόκλιση δείγματος ($s$)
Βαθμοί ελευθερίας (*df*)
Ενδοτεταρτομοριακό εύρος (IQR)

## *Κύριες εξισώσεις*

ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΓΙΑ ΔΕΙΓΜΑ

$$s = \sqrt{\frac{SS}{n-1}} = \sqrt{\frac{SS}{df}}$$

όπου $$SS = \sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{n}$$

# Ερωτήσεις επανάληψης

***4.9** Για καθένα από τα παρακάτω ζεύγη κατανομών, πρώτα αποφασίστε αν οι τυπικές αποκλίσεις τους είναι περίπου ίδιες ή διαφέρουν. Αν οι τυπικές αποκλίσεις τους διαφέρουν, διευκρινίστε ποια κατανομή θα έχει τη μεγαλύτερη τυπική απόκλιση. **Υπόδειξη:** Η κατανομή με το σύνολο αποτελεσμάτων ή τα μεμονωμένα αποτελέσματα με τη μεγαλύτερη ανομοιότητα θα παράγουν τη μεγαλύτερη τυπική απόκλιση, ανεξάρτητα από το αν, *κατά μέσο όρο*, τα αποτελέσματα σε μία κατανομή διαφέρουν από εκείνα στην άλλη κατανομή.

**(α)** Τα αποτελέσματα SAT για όλους τους τελειοφοίτους λυκείου ($a_1$) ή όλους τους πρωτοετείς φοιτητές ($a_2$)
**(β)** Ηλικίες ασθενών σε ένα γενικό νοσοκομείο ($b_1$) ή ένα νοσοκομείο παίδων ($b_2$)
**(γ)** Χρόνος αντίδρασης κινητικής δεξιότητας για επαγγελματίες παίκτες του μπέιζμπολ ($c_1$) ή φοιτητές ($c_2$)
**(δ)** GPA φοιτητών σε κάποιο πανεπιστήμιο όπως προκύπτουν από ένα τυχαίο δείγμα ($d_1$) ή από την απογραφή όλου του σώματος φοιτητών ($d_2$)
**(ε)** Αποτελέσματα άγχους (σε μια κλίμακα από το 0 ως το 50) ενός τυχαίου δείγματος φοιτητών του τελευταίου έτους ($e_1$) ή εκείνων που σκοπεύουν να εισαχθούν σε κλινική καταπολέμησης του άγχους ($e_2$)
**(στ)** Ετήσια εισοδήματα πρόσφατων αποφοίτων πανεπιστημίου ($f_1$) ή αποφοίτων της τελευταίας 20ετίας ($f_2$)
*Απαντήσεις στη σελίδα 535.*

**4.10** Όταν δεν διακόπτεται με τεχνητό τρόπο, η διάρκεια μιας εγκυμοσύνης μπορεί να περιγραφεί με μέσο 9 μηνών (270 ημερών) και τυπική απόκλιση μισού μήνα (15 ημερών).
**(α)** Μεταξύ ποιων δύο διαρκειών, σε ημέρες, γεννιούνται τα περισσότερα μωρά;
**(β)** Μια μικρή μειοψηφία όλων των μωρών θα γεννηθεί νωρίτερα από ______.
**(γ)** Μια μικρή μειοψηφία όλων των μωρών θα γεννηθεί αργότερα από ______.
**(δ)** Σε μια δικαστική αγωγή πατρότητας, ο φερόμενος ως πατέρας ισχυρίζεται ότι, επειδή βρισκόταν εκτός χώρας για μια περίοδο 10 μηνών πριν από τη γέννηση του μωρού, δεν μπορεί να είναι ο πατέρας. Έχετε να κάνετε κάποιο σχόλιο;

**4.11** Προσθέστε 10 σε κάθε αποτέλεσμα της Ερώτησης 4.4 (1, 3, 4, 4) για να παραγάγετε μια νέα κατανομή (11, 13, 14, 14). Θα περιμένατε ότι η τιμή της τυπικής απόκλισης δείγματος θα είναι ίδια για την αρχική και τη νέα κατανομή; Εξηγήστε την απάντησή σας και έπειτα υπολογίστε το $s$ για τη νέα κατανομή.

**4.12** Προσθέστε 10 μόνο στο μικρότερο αποτέλεσμα της Ερώτησης 4.4 (1, 3, 4, 4) για να παραγάγετε ακόμα μια νέα κατανομή (11, 3, 4, 4). Θα περιμένατε ότι η τιμή του $s$ θα είναι ίδια για την αρχική και τη νέα κατανομή; Εξηγήστε την απάντησή σας και έπειτα υπολογίστε το $s$ για τη νέα κατανομή.

***4.13** **(α)** Κατά τη θητεία του, ένας πρώην κυβερνήτης της Καλιφόρνια πρότεινε οι υπάλληλοι της πολιτείας να λάβουν αύξηση \$70 στον μηνιαίο μισθό τους. Ποια επίδραση θα είχε, αν είχε, αυτή η αύξηση στον μέσο και στην τυπική απόκλιση για την κατανομή των μηνιαίων μισθών όπως είχαν πριν από την πρόταση; **Υπόδειξη:** Φανταστείτε την επίδραση της πρόσθεσης \$70 στους μισθούς κάθε υπαλλήλου της πολιτείας στον μέσο και στην τυπική απόκλιση (ή σε ένα μέτρο μεταβλητότητας που μπορείτε να φανταστείτε πιο εύκολα, όπως στο εύρος).

**(β)** Άλλοι αξιωματούχοι της Καλιφόρνια πρότειναν να υπάρχει αύξηση 5% στο μισθολόγιο όλων των υπαλλήλων της πολιτείας. Ποια επίδραση θα είχε, αν είχε, αυτή η αύξηση στον μέσο και στην τυπική απόκλιση για την κατανομή των μηνιαίων μισθών όπως είχαν πριν από την πρόταση; **Υπόδειξη:** Φανταστείτε την επίδραση του πολλαπλασιασμού των μισθών κάθε υπαλλήλου της πολιτείας από 5% στον μέσο και στην τυπική απόκλιση ή στο εύρος.
*Απαντήσεις στη σελίδα 535.*

**4.14** **(α)** Χρησιμοποιώντας τον τύπο υπολογισμού για το άθροισμα τετραγώνων δείγματος, επαληθεύστε ότι η τυπική απόκλιση δείγματος, *s*, ισούται με 23,33 λίβρες για την κατανομή των βαρών των 53 ατόμων του Πίνακα 1.1.

**(β)** Επαληθεύστε ότι η πλειοψηφία όλων των βαρών εμπίπτει σε μία τυπική απόκλιση του αριθμητικού μέσου (169,51) και ότι μια μικρή μειοψηφία όλων των βαρών αποκλίνει περισσότερο από δύο τυπικές αποκλίσεις από τον μέσο.

**4.15** Υπό ποία έννοια η διασπορά

**(α)** είναι ένας τύπος μέσου;

**(β)** δεν είναι ένα εύκολα κατανοητό μέτρο μεταβλητότητας;

**(γ)** είναι ένα ενδιάμεσο βήμα για την τυπική απόκλιση;

**4.16** Προσδιορίστε μια σημαντική διαφορά μεταξύ της τυπικής απόκλισης και του μέσου.

**4.17** Γιατί η τιμή της τυπικής απόκλισης δεν μπορεί να είναι ποτέ αρνητική;

***4.18** Διευκρινίστε αν καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις για τους βαθμούς ελευθερίας είναι σωστή ή λάθος.

**(α)** Οι βαθμοί ελευθερίας αναφέρονται στο πλήθος των τιμών που μεταβάλλονται ελεύθερα στον πληθυσμό.

**(β)** Ένας βαθμός ελευθερίας χάνεται επειδή, όταν εκφράζεται ως απόκλιση από τον δειγματικό μέσο, η τελευταία απόκλιση στο δείγμα δεν καταφέρνει να δώσει πληροφορίες για τη μεταβλητότητα του πληθυσμού.

**(γ)** Οι βαθμοί ελευθερίας έχουν νόημα μόνο αν θέλουμε να εκτιμήσουμε κάποιο άγνωστο χαρακτηριστικό ενός πληθυσμού.

**(δ)** Οι βαθμοί ελευθερίας αντιπροσωπεύουν την κακή ποιότητα μίας ή περισσότερων παρατηρήσεων.
*Απαντήσεις στη σελίδα 535.*

**4.19** Σε σχέση με την Ερώτηση επανάληψης 2.18 στη σελίδα 75, θα περιγράφατε ότι η κατανομή των επιστημονικών πεδίων όλων των αντρών αποφοίτων έχει μέγιστη, μεσαία ή μικρή μεταβλητότητα;