

4. ΚΕΝΤΡΙΚΑΙ ΡΟΠΑΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Τὰ στατιστικά δεδομένα συνήθως ἀνέρχονται εἰς μέγα πλῆθος ἀριθμῶν. Μέχρι στιγμῆς ἐξητάσαμεν τρόπους παρουσιάσεως τῶν στατιστικῶν στοιχείων δι' ἀριθμητικῶν πινάκων καὶ γραφικῶν παραστάσεων. Διὰ τοῦ τρόπου αὐτοῦ ἦτο εὐκόλος ἡ ἐξαγωγή συμπερασμάτων.

Εἰς τὸν πίνακα 7 (σελ. 17), αἱ τιμαὶ ἐκάστου διαστήματος ἀντικατεστάθησαν διὰ τῆς μέσης τιμῆς των (στήλη 2). Αἱ χαρακτηριστικαὶ αὗται τιμαί, αἱ ὁποῖαι ἀντικαθιστοῦν ἓνα σύνολον ἀριθμῶν συγκεντρωμένων ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον πέριξ αὐτῶν, ὀνομάζονται **κεντρικαὶ ροπαὶ** (central tendency). Αἱ κεντρικαὶ ροπαὶ φανερώνουν τὴν συγκεντρωσιν συνόλου ἀριθμῶν, ἡ ὁποία ὑπάρχει εἰς τὰ στατιστικά δεδομένα. Τὸ σύνολον αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν τείνει πέριξ αὐτῶν τῶν τιμῶν. Θὰ ἐξετάσωμεν 3 εἶδη κεντρικῶν ροπῶν. Τὴν διάμεσον, τὴν ἐπικρατοῦσαν τιμὴν καὶ τὸν ἀριθμητικὸν μέσον.

ΔΙΑΜΕΣΟΣ

Ἡ **διάμεσος** (median) εἶναι μία τιμὴ εἰς μίαν σειρὰν παρατηρήσεων, αἱ ὁποῖαι ἔχουν διαταχθῇ κατ' αὔξοντα ἢ φθίνοντα ἀριθμὸν, ἀριστερὰ τῆς ὁποίας εὐρίσκεται τὸ ἓνα ἡμισυ τῶν παρατηρήσεων καὶ δεξιὰ τὸ ἕτερον. Ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν παρατηρήσεων μας εἶναι περιττός ($2N + 1$), τότε ἡ διάμεσος ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν τιμὴν ἡ ὁποία ἐδόθη εἰς τὴν παρατήρησιν ὑπ' ἀριθμὸν $N + 1$, νοουμένου πάντοτε ὅτι αἱ παρατηρήσεις μας ἔχουν τοποθετηθῇ διατακτικῶς. Οὕτως ἔχομεν N περιπτώσεις μεγαλυτέρας τῆς διαμέσου καὶ N περιπτώσεις μικροτέρας αὐτῆς.

Α

Ὑποθέτομεν ὅτι ἔχομεν τὰς κάτωθι τιμὰς 7 παρατηρήσεων

5, 9, 13, **16**, 20, 23, 25,

αἱ ὁποῖαι ἔχουν τοποθετηθῇ κατ' αὔξοντα ἀριθμὸν. Εἶναι προφανές ὅτι τὸ 16 εἶναι ἡ διάμεσος. Τρεῖς περιπτώσεις εἶναι ἀριστερὰ τῆς διαμέσου καὶ αἱ ἄλλαι τρεῖς δεξιὰ.

Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν μετρήσεων εἶναι ἄρτιος ($2N$), τότε εἶναι φανερόν

ὅτι δὲν ὑπάρχει μεσαία περίπτωσης. Ἡ διάμεσος ἐδῶ ὀρίζεται ὡς ὁ μέσος ὅρος τῶν μετρήσεων ὑπ' ἀριθμὸν N καὶ $N + 1$, διατακτικῶς τοποθετημένων. Π.χ. τῶν μετρήσεων

5, 10, 12, **15**, **15**, 18, 20, 25,

τῶν ὁποίων τὸ πλῆθος εἶναι ἄρτιον, διάμεσος εἶναι τὸ $\frac{15 + 15}{2} = 15$.

Ἡ διάμεσος τῆς κάτωθι σειρᾶς ἀριθμῶν

13, 14, 15, **16**, **17**, 18, 19, 20

εἶναι 16,5, διότι $\frac{16 + 17}{2} = 16,5$, μολονότι δὲν ὑπάρχει αὐτὴ ἡ τιμὴ εἰς τὴν ἀκολουθίαν τῶν ἀριθμῶν.

Τέλος τῆς σειρᾶς τῶν ἀριθμῶν

14, 16, 18, **20**, **23**, 26, 29, 30

ἡ διάμεσος εἶναι $21,5 = \frac{20 + 23}{2}$.

Ὁ ἀνωτέρω τρόπος εὐρέσεως τῆς διαμέσου χρησιμοποιεῖται, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν περιπτώσεων εἶναι μικρὸς καὶ ἡ μεταβλητὴ ἀσυνεχῆς, αἱ δὲ τιμαὶ δὲν ἐπαναλαμβάνονται ἢ δὲν εἶναι ὁμαδοποιημέναι.

B

ὑποθέτομεν ὅτι ἔχομε τὴν σειρὰν τῶν παρατηρήσεων

27, 27, 27, 28, 28, 28, 29, 29, 30, 30,

κατὰ τὴν ὁποίαν ἐκάστη τιμὴ λαμβάνεται πλέον τῆς μιᾶς φορᾶς. Ὅταν ἡ κατανομὴ εἶναι συνεχῆς, κάθε μία ἐκ τῶν τριῶν τιμῶν 28 περιέχεται εἰς τὸ διάστημα 27,5-28,5-. Ἐπειδὴ τὰ δύο 28 εὐρίσκονται ἀριστερὰ τῆς διαμέσου καὶ τὸ ἕτερον δεξιὰ, σημαίνει ὅτι ἡ διάμεσος εὐρίσκεται ἀμέσως μετὰ τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ διαστήματος 27,5-28,5-. Κατὰ συνέπειαν, πρέπει νὰ προσθέσωμε $\frac{2}{3} \simeq 0,67$ εἰς τὴν τιμὴν 27,5 καὶ θὰ ἔχωμεν τὴν διάμεσον $28,17 = 27,5 + 0,67$.

Γ

Θὰ ὑπολογίσωμεν τώρα τὴν διάμεσον μιᾶς συνεχοῦς κατανομῆς, ὅταν δίδεται ὁ πίναξ συχνοτήτων (βλ. πίν. 15). Ὁ σκοπὸς μας καὶ ἐδῶ εἶναι νὰ ὀρίσωμεν τὴν τιμὴν τῆς μεταβλητῆς, δηλ. τὴν διάμεσον, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν παρατηρήσεων προηγεῖται καὶ τὸ ἄλλο ἡμισυ τῶν παρατηρήσεων ἔπεται. Εἰς τὴν περίπτωσηιν αὐτὴν διὰ τὴν εὐρεσιν τῆς διαμέσου ἀκολουθοῦμεν τὴν ἐξῆς πορείαν.

(α) Καταγράφομεν τὴν ἀθροιστικὴν συχνότητα εἰς μίαν νέαν στήλην (στήλη 4).

(β) Καθορίζομεν τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν παρατηρήσεων. Ἐν προκειμένῳ 40. ($N=80$).

(γ) Εὐρίσκομεν τὸ διάστημα ἐντὸς τοῦ ὁποίου περιλαμβάνεται ἡ 40ῃ περίπτωσις. Τὰ ἀκριβῆ ὅρια τοῦ ἐν λόγω διαστήματος εἶναι 69,5-74,5-.

X		f	cf
45-49	44,5-49,5-	1	1
50-54	49,5-54,5-	3	4
55-59	54,5-59,5-	5	9
60-64	59,5-64,5-	9	18
65-69	64,5-69,5-	12	30
70-74	69,5-74,5-	15	45
75-79	74,5-79,5-	13	58
80-84	79,5-84,5-	10	68
85-89	84,5-89,5-	6	74
90-94	89,5-94,5-	4	78
95-99	94,5-99,5-	2	80
		$N = 80$	

Πίναξ 15

(δ) Αἱ 15 περιπτώσεις, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἐντὸς τοῦ διαστήματος 69,5-74,5-, θεωροῦνται ὅτι κατανέμονται κανονικῶς· κατὰ συνέπειαν 10 περιπτώσεις εἶναι μικρότεροι τῆς διαμέσου καὶ 5 μεγαλύτεροι. Αἱ 10 περιπτώσεις καταλαμβάνουν τὰ $\frac{10}{15}$ τοῦ διαστήματος 69,5-74,5-, τοῦ ὁποίου τὸ εὖρος εἶναι 5 μονάδες. Συνεπῶς, ἡ διάμεσος θὰ ἀπέχη κατὰ $\frac{10}{15} \cdot 5 = 3,33$ ἐκ τοῦ κατωτέρου ὁρίου 69,5. Προσθέτοντες τὸ 69,5 καὶ 3,33 θὰ λάβωμεν τὴν τιμὴν τῆς διαμέσου $72,83 = 69,5 + 3,33$.

Δ

Ἀντὶ τῆς ἀνωτέρω πορείας δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν κάτωθι τύπον διὰ τὴν εὑρεσιν τῆς διαμέσου:

$$4.1 \quad \text{διάμεσος} = X_k + \frac{c}{f_d} \left(\frac{N}{2} - \Sigma f_k \right)$$

Ὁ τύπος αὐτὸς εἶναι εἰδικῆς μορφῆς τοῦ τύπου τῶν ἑκατοστημορίων (σελ. 27),

ὅπου X_n = τὸ ἀκριβὲς κατώτερον ὄριον τοῦ διαστήματος, τὸ ὁποῖον περιλαμβάνει τὴν διάμεσον,
 c = τὸ εὖρος τῶν διαστημάτων,
 f_δ = ἡ συχνότης τοῦ διαστήματος τοῦ περιέχοντος τὴν διάμεσον,
 N = τὸ πλῆθος τῶν δεδομένων,
 Σf_n = τὸ ἄθροισμα τῶν συχνοτήτων μέχρι τὴν X_n τιμὴν.

Ἐπειδὴ X_n = 69,5
 c = 5
 f_δ = 15
 N = 80
 Σf_n = 30 ἔχομεν

$$\text{διάμεσον} = 69,5 + \frac{5}{15} (40 - 30)$$

$$\text{διάμεσον} = 69,5 + 3,33 = 72,83.$$

Ἡ διάμεσος ὑπολογίζεται εὐκόλως, ὅταν τὰ στατιστικὰ δεδομένα εἶναι μικροῦ πληθικοῦ ἀριθμοῦ. Ποτὲ δὲν ἐπηρεάζεται ἀπὸ τὰς ἄκρας τιμὰς, ἐπηρεάζεται ὅμως ἀπὸ τὸ πλῆθος τῶν δεδομένων. Ἡ διάμεσος εἶναι περισσότερο κεντρικὴ ροπή ἢ ὁ ἀριθμητικὸς μέσος, ὡς θὰ ἀναφέρωμεν ἀργότερον.

Γεωμετρικῶς ἡ διάμεσος εἶναι ἡ τιμὴ τῆς μεταβλητῆς X , τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων, καὶ ἀνταποκρίνεται εἰς τὴν κάθετον εὐθεΐαν, ἡ ὁποία διαιρεῖ ἓνα ἰστόγραμμα ἢ τὸ σύνολον τοῦ ἐμβλαδοῦ, τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται κάτωθεν τῆς καμπύλης τῆς κατανομῆς συχνοτήτων, εἰς δύο μέρη ἰσεμβαδικά. Ἐὰν ἡ κατανομή παρουσιάζεται κυματοειδῶς ἀσύμμετρος, ἡ διάμεσος προτιμᾶται ἔναντι τῶν ἄλλων κεντρικῶν ροπῶν, διότι, ἀνεξαρτήτως τῆς ἀσυμμετρίας τῆς κατανομῆς, πάντοτε ἐκφράζεται ὡς ἡ μεσαία τιμὴ.

ΕΠΙΚΡΑΤΟΥΣΑ ΤΙΜΗ

Ἡ τιμὴ ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν μεγαλύτεραν συχνότητα εἰς μίαν κατανομήν λέγεται **ἐπικρατοῦσα τιμὴ** (mode). Οὕτω, ἐὰν εἰς μίαν γραπτὴν ἐξέτασιν 16 ὑποψηφίων ἔχωμεν τοὺς βαθμοὺς

9, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 13, 15, 15, 15, 15, 15, 18, 19, 20,

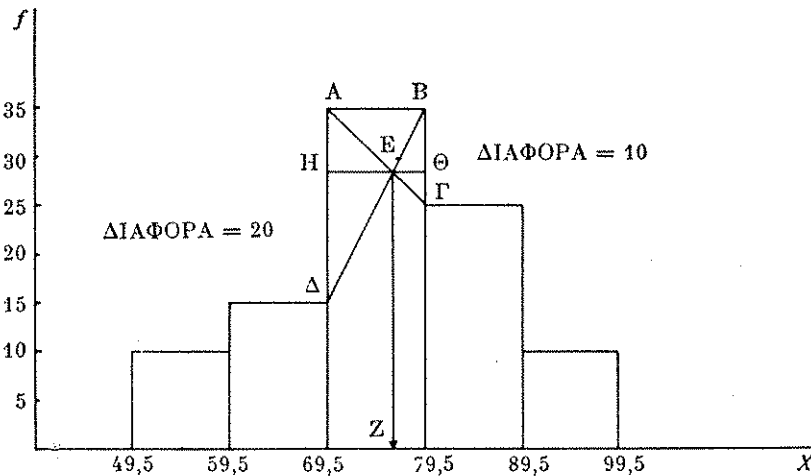
ὁ βαθμὸς ὁ ὁποῖος ἔχει δοθῇ περισσότερον παντὸς ἄλλου εἶναι τὸ 15 (5 φορές). Τὸ 15 ἐν προκειμένῳ εἶναι ἡ ἐπικρατοῦσα τιμὴ. Εἰς τὴν ἀκολουθίαν τῶν ἀριθμῶν

8, 8, 9, 10, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 13, 14, 15, 16, 16, 16, 16, 17, 18

τὸ 12 καὶ τὸ 16 ἔχουν ἐπαναληφθῇ ἀνὰ 4 φορές. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἐπικρατοῦσα τιμὴ (ἐπικρατοῦσαι τιμαὶ 12, 16) οὐδὲν τὸ οὐσιαστικὸν προσφέρει ἐκτὸς τῆς διαπιστώσεως ὅτι ἡ ἐξέτασίς μας ἀπέτυχε νὰ διασκορπίσῃ τοὺς ὑποψηφίους. Τὸ σύνολον τῶν ἀνωτέρω ἀριθμῶν, ἐὰν παρασταθῇ γραφικῶς, θὰ μᾶς δώσῃ τὴν δικόρουφον καμπύλην. Διὰ νὰ ἀποφύγωμεν τοῦτο, ὁμαδοποιοῦμεν τὰς παρατηρήσεις μας ἢ εὐρύνομεν τὰ διαστήματα, ἐὰν εἶναι ἤδη ὁμαδοποιημένα αἱ τιμαὶ μας.

Εἰς μίαν συνεχῇ κατανομὴν τὸ διάστημα τάξεως, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν μεγαλύτεραν συχνότητα, λέγεται **ἐπικρατοῦσα τάξις**.

Ὅταν ἡ κατανομὴ εἶναι συνεχῆς ἢ ὅταν θεωρῇται τοιαύτη, δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν γραφικῶς τὴν ἐπικρατοῦσαν τιμὴν ἀπὸ τὸ ἱστόγραμμα συχνότητων. (σχ. 18)



Σχ. 18

Συνδέομεν δι' εὐθυγράμμων τμημάτων τὰς δύο ἄνω κορυφὰς Α καὶ Β τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μετὰ τὴν μεγαλύτεραν συχνότητα, μετὰ τὰς γειτονικὰς κορυφὰς Γ καὶ Δ τῶν δύο ἐκατέρωθεν ὀρθογωνίων. Ἀπὸ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν τμημάτων ΑΓ καὶ ΒΔ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν συχνότητων. Τὸ σημεῖον τομῆς τοῦ ἄξονος X καὶ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΕΖ ὀρίζει τὴν ἐπικρατοῦσαν τιμὴν. Ὅπως φαίνεται ἐκ τοῦ σχ. 18, ἡ ἐπικρατοῦσα τιμὴ ἰσοῦται μετὰ 76,2. Ἡ εὕρεσις τῆς ἐπικρατούσης τιμῆς μετὰ ἀκρίβειαν προϋποθέτει τὴν γνῶσιν ὅλων τῶν στοιχείων τῆς κατανομῆς. Τοῦτο εἶναι δύσκολον, ὅταν τὰ στοιχεῖα τῆς κατανομῆς εἶναι πολυπληθῆ. Εἰς μίαν κατανομὴν συχνότητων ἡ ἐπικρατοῦσα τιμὴ εἶναι ἓνα σημεῖον τοῦ ὀριζοντίου ἄξονος, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ ὑψηλότερον σημεῖον τῆς καμπύλης. Ὅπως

ή διάμεσος τοιουτοτρόπως και ή επικρατούσα τιμή δέν επηρεάζεται από τās ακραίας τιμές.

Καλοῦμεν τὸ $AD = \delta_1$, τὸ $BF = \delta_2$ και τὸ κατώτερον ὄριον τοῦ διαστήματος, τὸ ὁποῖον περιέχει τὴν επικρατοῦσαν τιμὴν E_T , συμβολίζομεν ἀντιστοίχως μὲ X_K . Ἐὰν μὲ c συμβολίσωμεν τὸ εὖρος τοῦ διαστήματος, τότε ὁ τύπος

$$4.2 \quad E_T = X_K + \left(\frac{\delta_1}{\delta_1 + \delta_2} \right) c$$

δίδει ὑπολογιστικῶς τὴν επικρατοῦσαν τιμὴν. Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου 4.2 τῶν στοιχείων τοῦ σχ. 18 λαμβάνομεν

$$E_T = 69,5 + \left(\frac{20}{20 + 10} \right) 10$$

$$E_T = 69,5 + 6,67 = 76,17$$

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΣ ΜΕΣΟΣ

Εἰς πολλὰ προβλήματα εἶναι ἀναγκαῖον και χρήσιμον ἓνα σύνολον ἀριθμῶν νὰ ἀντιπροσωπεύεται ἀπὸ ἓνα και μόνον ἀριθμόν. Αἱ ἔννοιαί τῆς διαμέσου και τῆς επικρατούσης τιμῆς εἶναι πλέον γνωσταί. Ἐπὶ πλέον τῶν ἤδη ἀναφερθεισῶν κεντρικῶν ροπῶν ὑπάρχει μία τρίτη, ἡ ὁποία εἶναι ἡ περισσότερον γνωστὴ και χρήσιμος· εἶναι ὁ **ἀριθμητικὸς μέσος** (arithmetic mean). Ὁ ἀριθμητικὸς μέσος ἀντιπροσωπεύεται δι' ἑνὸς ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος προκύπτει ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματος τῶν τιμῶν τῶν στοιχείων ἑνὸς συνόλου διὰ τοῦ πληθικοῦ ἀριθμοῦ τῶν δεδομένων.

A

Παίρνομεν ὡς δεδομένον ἓνα δεῖγμα ἐκ πέντε μαθητῶν, οἱ ὁποῖοι θὰ ἀποτελέσουν μίαν πειραματικὴν ὁμάδα. Τῶν μαθητῶν αὐτῶν ἐμετρήθη ὁ δείκτης εὐφυΐας και εὐρέθη νὰ εἶναι

$$85, 100, 115, 105, 95.$$

Ζητεῖται ὁ ἀριθμητικὸς μέσος εὐφυΐας τῆς συγκεκριμένης πειραματικῆς ὁμάδος.

Διὰ τὸν ὑπολογισμόν τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου, βασικῶς ἀπαιτεῖται ἡ εὗρεσις τοῦ ἀθροίσματος τῶν δεικτῶν εὐφυΐας και ἡ γνῶσις βεβαίως, τοῦ πλήθους τῶν στοιχείων.

Ὑπολογίζομεν κατ' ἀρχὴν τὸ ἄθροισμα τῶν πέντε δοθέντων ἀριθμῶν, τὸ ὁποῖον συμβολίζομεν μὲ

$$\Sigma X = 85 + 100 + 115 + 105 + 95 = 500$$

και το διαιρούμεν δια του αριθμου $N = 5$, ήτοι

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{500}{5} = 100$$

Με το σύμβολον $\bar{X}$ παριστῶμεν τὸν ἀριθμητικὸν μέσον τοῦ δείγματος καὶ με το σύμβολον μ τὸν ἀριθμητικὸν μέσον τοῦ πληθυσμοῦ ἐκ τοῦ ὁποίου προῆλθε τὸ δείγμα. Ἡ σπουδαιότης τῆς διαφορᾶς συμβολισμοῦ τῶν ἀριθμητικῶν μέσων, δείγματος καὶ πληθυσμοῦ, θὰ γίνῃ προφανὴς εἰς τὰ ἐπόμενα κεφάλαια.

Γενικῶς ἐὰν ἔχωμεν τὰς μετρήσεις $X_1, X_2, \dots, X_N$, τότε ὁ ἀριθμητικὸς μέσος δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$4.3 \quad \bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_N}{N} = \frac{\Sigma X}{N}$$

Συνήθως εἰς τὴν πράξιν σπανίως αἱ τιμαὶ τῶν στοιχείων λαμβάνονται μίαν φοράν. Εἰς τὰς περιπτώσεις κατὰ τὰς ὁποίας αἱ τιμαὶ τῶν δεδομένων ἔχουν δοθῇ πέραν τῆς μιᾶς φορᾶς, δυνάμεθα νὰ εὗρωμεν τὸν ἀριθμητικὸν μέσον με δύο τρόπους· ἢ νὰ ἀκολουθηθῇ ἡ ἀναφερθεῖσα μέθοδος ἢ νὰ γίνῃ ἐφαρμογὴ τοῦ τύπου

$$4.4 \quad \bar{X} = \frac{f_1 X_1 + f_2 X_2 + \dots + f_p X_p}{f_1 + f_2 + \dots + f_p} = \frac{\Sigma fX}{N}$$

εἰς τὸν ὅποιον τὰ σύμβολα $f_1, f_2, \dots, f_p$ παριστοῦν τὰς συχνότητας ἐμφανίσεως τῶν τιμῶν $X_1, X_2, \dots, X_p$.

B

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ζητεῖται ὁ ἀριθμητικὸς μέσος τῶν δεδομένων

13, 13, 15, 15, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 16, 16, 16, 19, 19, 19, 19.

Θὰ ὑπολογίσωμεν τὸν ἀριθμητικὸν μέσον τῶν δοθέντων στοιχείων δι' ἀμφοτέρων τῶν τρόπων.

Ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ τύπου 4.3 προϋποθέτει τὴν γνῶσιν τῶν στοιχείων

$$\begin{aligned} \Sigma X &= 13 + 13 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 16 + \\ &\quad 16 + 16 + 16 + 16 + 16 + 19 + 19 + 19 + 19 = 288 \end{aligned}$$

$N = 18$, τὸ πλῆθος τῶν δεδομένων.

Ὁ λόγος αὐτῶν μᾶς δίδει τὸν ἀριθμητικὸν μέσον

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{288}{18} = 16$$

Διὰ νὰ εὐρωμεν εὐκολώτερον τὸν ἀριθμητικὸν μέσον ἐκ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου 4.4, δημιουργοῦμε τὸν πίνακα 16.

Κατ' ἀρχὴν καταγράφομεν τὰς διαφορετικὰς τιμὰς αἱ ὁποῖαι ἐδόθησαν εἰς τὰ 18 ὑποκείμενα διατακτικῶς εἰς τὴν στήλην X . Αἱ διαφορετικαὶ τιμαὶ εἶναι τὸ 13, 15, 16 καὶ 19. Παρατηροῦμεν μετὰ ὅτι ἡ τιμὴ 13 ἐδόθη 2 φορές. Γράφομεν τὸν ἀριθμὸν 2 εἰς τὴν στήλην συχνότητων f καὶ παραπλεύρως τῆς τιμῆς 13. Ἡ τιμὴ 15 ἐδόθη 6 φορές. Γράφομεν τὸν ἀριθμὸν 6 κάτωθεν τοῦ 2 καὶ δεξιὰ τοῦ ἀριθμοῦ 15 τῆς στήλης X . Μὲ τὸν ἴδιον τρόπον εὐρίσκομεν

X	f	fX
13	2	26
15	6	90
16	6	96
19	4	76
	$\Sigma f = 18$	$\Sigma fX = 288$

Πίναξ 16

καὶ τὰς ὑπολοίπους τιμὰς. Ἡ στήλη f περιλαμβάνει τὸ πλῆθος τῶν ὑποκειμένων, τὰ ὁποῖα ἔλαβον τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τὰς ἐμφαινόμενας εἰς τὴν στήλην X .

Τὸ ἄθροισμα τῶν στοιχείων τῆς στήλης f μᾶς δίδει $\Sigma f = N = 18$. Τέλος εἰς τὴν τρίτην στήλην fX ἔχουν περιληφθῇ τὰ γινόμενα τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τῶν στηλῶν X καὶ f . Τὸ ἄθροισμα αὐτῶν τῶν στοιχείων ἰσοῦται μὲ $\Sigma fX = 288$. Τὰ ἄγνωστα στοιχεῖα τοῦ τύπου 4.4 εἶναι πλέον γνωστά. Ἀπομένει μία διαίρεσις, ἥτοι

$$\bar{X} = \frac{\Sigma fX}{N} = \frac{288}{18} = 16$$

Μολονότι αἱ περιγραφεῖσαι μέθοδοι εὐρέσεως τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου εἶναι εὐκολοί, ἐν τούτοις συνιστᾶται καὶ ἡ γνώσις ἐτέρων μεθόδων, αἱ ὁποῖαι πιθανόν νὰ φαίνωνται πολύπλοκοι εἰς τὰ πρῶτα στάδια, ἀλλ' οἱ ὑπολογισμοὶ εἶναι εὐκολώτεροι, ἰδιαίτερος ὅταν τὸ πλῆθος τῶν δεδομένων εἶναι μεγάλο.

ΕΥΡΕΣΙΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΥ ΜΕΣΟΥ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΥΠΟΘΕΤΙΚΟΥ ΜΕΣΟΥ

A

Μία ἄλλη μέθοδος εὐρέσεως τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου εἶναι ἡ διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως ὑποθετικοῦ μέσου.

Ὡς ὑποθετικὸν μέσον θεωροῦμεν οἰονδήποτε ἀριθμὸν ἐκ τῶν τιμῶν τῶν στοιχείων, τῶν ὁποίων ζητεῖται ἡ εὕρεσις τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου.

Ἐστω ὅτι δίδονται αἱ τιμαὶ $N = 10$ στοιχείων,

19, 16, 17, 18, 15, 16, 15, 17, 18, 20

καὶ ζητεῖται ἡ εὕρεσις τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου τῇ βοηθείᾳ τοῦ ὑποθετικοῦ μέσου.

Ὅλα τὰ δοθέντα στοιχεῖα τὰ θέτομεν εἰς τὸν πίνακα 17, εἰς τὴν στήλην X . Λαμβάνομεν ἓνα ἀριθμὸν ἐξ αὐτῶν, τὸν ὁποῖον ὀνομάζομεν ὑποθετικὸν μέσον καὶ τὸν συμβολίζομεν μὲ $\bar{X}_v$. Ὡς ὑποθετικὸν μέσον θεωροῦμεν τὸν ἀριθμὸν

Βαθμοὶ	Ὑποθετικὸς μέσος	Θετικαὶ διαφοραὶ	Ἀρνητικαὶ διαφοραὶ	Ὑποθετικὸς μέσος	Θετικαὶ διαφοραὶ	Ἀρνητ. διαφοραὶ
X	$\bar{X}_v$	+	—	$\bar{X}_v$	+	—
19	17	+ 2	—	16	+ 3	—
16		—	— 1		0	—
17		0	—		+ 1	—
18		+ 1	—		+ 2	—
15		—	— 2		—	— 1
16		—	— 1		0	—
15		—	— 2		—	— 1
17		0	—		+ 1	—
18		+ 1	—		+ 2	—
20		+ 3	—		+ 4	—
		+ 7	— 6		+ 13	— 2

Πίναξ 17

$\bar{X}_v = 17$, τὸν ὁποῖον καταγράφομεν εἰς τὴν ἐπομένην στήλην. Ἀκολουθῶς ὑπολογίζομεν ὅλας τὰς διαφορὰς $X - \bar{X}_v$ θετικὰς καὶ ἀρνητικὰς, τὰς ὁποίας τοποθετοῦμεν εἰς τὰς ἀντιστοίχους στήλας 3 καὶ 4, ἥτοι

$$X - \bar{X}_v = 19 - 17 = +2$$

$$X - \bar{X}_v = 16 - 17 = -1$$

Τὸ +2 τὸ γράφομεν εἰς τὰς θετικὰς διαφορὰς καὶ τὸ —1 εἰς τὰς ἀρνητικὰς διαφορὰς. Ὅμοίως εὐρίσκονται καὶ αἱ ὑπόλοιποι διαφοραί.

Τὸ ἄθροισμα τῶν θετικῶν διαφορῶν εἶναι +7 καὶ τῶν ἀρνητικῶν —6.

Τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν δύο διαφορῶν, τὸ ὁποῖον συμβολίζομεν μὲ Σx , ἰσοῦται μὲ $\Sigma x = +7 - 6 = 1$. Τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα $\Sigma x = 1$, διαιρούμενον διὰ τοῦ $N = 10$ ($\frac{\Sigma x}{N} = \frac{1}{10}$) καὶ προστιθέμενον ἀλγεβρικῶς εἰς τὸν ὑποθετικὸν μέσον ($\bar{X}_v = 17$), θὰ μᾶς δώσῃ τὸν ἀριθμητικὸν μέσον 17,1. Συνοπτικῶς δηλ. ἐγίνε ἐφαρμογὴ τοῦ τύπου

$$4.5 \quad \bar{X} = \bar{X}_v + \frac{\Sigma x}{N}$$

$$\bar{X} = 17 + \frac{1}{10} = 17,1$$

Ἴσως ὑπάρξῃ ἡ ἀπορία· τί θὰ συμβῇ ἐὰν ληφθῇ ὡς ὑποθετικὸς μέσος ἀριθμὸς διάφορος τοῦ 17; Οἰοσθήποτε ἀριθμὸς καὶ ἐὰν ληφθῇ, τὸ τελικὸν ἀποτέλεσμα θὰ εἶναι τὸ αὐτό. Πρὸς ἐπιβεβαίωσιν, ἀντὶ τοῦ 17 θεωροῦμεν ὡς ὑποθετικὸν μέσον τὸν $\bar{X}_v = 16$ (πίν. 15, στήλῃ 5) καὶ εὐρίσκομεν, ὡς καὶ προηγουμένως, τὰς θετικὰς καὶ ἀρνητικὰς διαφορὰς $X - \bar{X}_v$. Τὸ ἄθροισμα τῶν θετικῶν διαφορῶν ὅταν $\bar{X}_v = 16$, ἰσοῦται μὲ +13 καὶ τῶν ἀρνητικῶν μὲ -2. Τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν δύο διαφορῶν ἰσοῦται μὲ $\Sigma x = +13 - 2 = 11$.

Ἀντικαθιστῶμεν τὰς εὐρεθείσας τιμὰς εἰς τὸν τύπον 4.5

$$\bar{X} = \bar{X}_v + \frac{\Sigma x}{N}$$

$$\bar{X} = 16 + \frac{11}{10} = 17,1$$

Εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις ἔχει εὐρεθῇ ἡ αὐτὴ τιμὴ 17,1.

Ἡ ἄνωτέρω μέθοδος προϋποθέτει τὴν ὑπαρξίν μικροῦ ἀριθμοῦ δεδομένων. Εἰς τὰς περιπτώσεις ὅμως κατὰ τὰς ὁποίας τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων εἶναι μεγάλο ἢ τὰ στοιχεῖα μᾶς δίδονται ὑπὸ μορφὴν πίνακος συχνοτήτων, ἀκολουθεῖται παραπλήσια πορεία διὰ τὴν εὐρεσιν τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου.

B

Ὑποθέτομεν ὅτι μᾶς ἐδόθη ὁ πίναξ 18, στήλαι X καὶ f , ὁ ὁποῖος παρουσιάζει τὴν βαθμολογίαν 80 μαθητῶν εἰς τὰ Ἑλληνικά καὶ μᾶς ζητεῖται ἡ εὐρεσίς τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου. Διὰ τὴν εὐρεσιν τοῦ ζητούμενου ἀκολουθεῖται ἡ ἐξῆς πορεία.

(1) Ἐκλέγεται τυχαίως ἓνας ἀριθμὸς, τὸ 15, τὸν ὁποῖον θεωροῦμεν ὡς τὸν ὑποθετικὸν μέσον. Συνήθως ἐκλέγεται ὁ ἀριθμὸς μὲ τὴν μεγαλύτεραν συχνότητα, διότι εἶναι ὁ πλησιέστερος πρὸς τὸν ἀριθμητικὸν μέσον.

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \text{Λαμβάνονται αἱ ἀλγεβρικοὶ διαφοραὶ} \quad X - \bar{X}_v = x \\
 & 8 - 15 = -7 \\
 & 9 - 15 = -6 \\
 & 10 - 15 = -5 \quad \text{κ.λ.π}
 \end{aligned}$$

αἱ ὁποῖαι ἔχουν καταγραφῇ εἰς τὴν στήλην 3. Προφανῶς εἰς τὰς περιπτώσεις κατὰ τὰς ὁποίας αἱ τιμαὶ τοῦ X εἶναι μεγαλύτεραι τοῦ $\bar{X}_v = 15$ θὰ ἔχωμεν θετικὰς διαφοράς. Ἐν ἐναντία περιπτώσει αἱ διαφοραὶ θὰ εἶναι ἀρνητικάι.

(3) Πολλαπλασιάζονται αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῶν στηλῶν x καὶ f . Τὰ προκύπτοντα γινόμενα

$$\begin{aligned}
 fx &= 1 \cdot (-7) = -7 \\
 fx &= 2 \cdot (-6) = -12 \\
 fx &= 4 \cdot (-5) = -20,
 \end{aligned}$$

ὁμοίως καὶ τὰ λοιπὰ, ἔχουν ἀναγραφῇ εἰς τὴν στήλην 4. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀρνητικῶν τιμῶν τῆς τετάρτης στήλης ἰσοῦται μὲ -103 καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν

Βαθμοὶ	Συχνότης	Ὑποθετικὸς μέσος $\bar{X}_v = 15$		Ὑποθετικὸς μέσος $\bar{X}_v = 14$	
X	f	$X - \bar{X}_v = x$	fx	$X - \bar{X}_v = x$	fx
8	1	-7	-7	-6	-6
9	2	-6	-12	-5	-10
10	4	-5	-20	-4	-16
11	5	-4	-20	-3	-15
12	6	-3	-18	-2	-12
13	8	-2	-16	-1	-8
					(- 67)
14	10	-1	-10	0	0
			(- 103)		(+ 110)
15	14	0	0	+ 1	+ 14
			(+ 66)		
16	11	+ 1	+ 11	+ 2	+ 22
17	9	+ 2	+ 18	+ 3	+ 27
18	5	+ 3	+ 15	+ 4	+ 20
19	3	+ 4	+ 12	+ 5	+ 15
20	2	+ 5	+ 10	+ 6	+ 12
	$\Sigma f = 80$		$\Sigma fx = -37$		$\Sigma fx = +43$

Πίναξ 18

θετικῶν τιμῶν ἰσοῦται με $+66$. Τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν δύο ἄθροισμάτων ἰσοῦται με $\Sigma fx = -37$.

(4) Τέλος ἐφαρμόζεται ὁ τύπος

$$\begin{aligned} 4.6 \quad \bar{X} &= \bar{X}_v + \frac{\Sigma fx}{N} \\ \bar{X} &= 15 + \frac{-37}{80} = 14 \frac{43}{80} = 14,5375 \end{aligned}$$

Ἀσφαλῶς ἀναμένομεν ὅτι θὰ μᾶς δοθῇ ἡ αὐτὴ ἀπάντησις, ἐὰν ληφθῇ ὡς ὑποθετικὸς μέσος ἀριθμὸς διάφορος τοῦ 15.

Πράγματι (1) λαμβάνομεν τώρα ὡς ὑποθετικὸν μέσον $\bar{X}_v = 14$.

(2) Αἱ ἀλγεβρικαὶ διαφοραὶ $X - \bar{X}_v = x$, ὅταν $\bar{X}_v = 14$, ἔχουν ἀναγραφῇ εἰς τὴν στήλην 5 τοῦ πίνακος 18.

(3) Πολλαπλασιάζονται αἱ τιμαὶ τῆς στήλης f με τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς νέας στήλης x , τῶν ὁποίων τὰ γινόμενα ἀναγράφονται εἰς τὴν τελευταίαν στήλην. Τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ἀρνητικῶν τιμῶν (-67) καὶ τῶν θετικῶν τιμῶν ($+110$) ἰσοῦται με $\Sigma fx = +43$.

(4) Αἱ ὑπολογισθεῖσαι τιμαὶ ἀντικαθίστανται εἰς τὸν τύπον

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \bar{X}_v + \frac{\Sigma fx}{N} \\ \bar{X} &= 14 + \frac{43}{80} = 14 \frac{43}{80} = 14,5375 \end{aligned}$$

Αἱ δύο τιμαὶ συμπίπτουν ὡς ἀνεμένετο.

ΕΥΡΕΣΙΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΥ ΜΕΣΟΥ ΔΓ' ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΜΕΝΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ

Ἐὰν τὸ πλῆθος τῶν δεδομένων εἶναι πολὺ μεγάλο καὶ ἡ δειγματικὴ κύμανσις ἐπίσης μεγάλη, συνιστᾶται ἡ ὁμαδοποίησις των. Ἀκολούθως, ἐκ τῆς κατανομῆς συχνοτήτων εὐρίσκεται ὁ ἀριθμητικὸς μέσος. Εὐκόλως γίνεται ἀντιληπτὸν ὅτι ἡ ὁμαδοποίησις τῶν δεδομένων ἐμπεριέχει ἀπώλειαν πληροφοριῶν καὶ ἀκριβείας, διότι κατὰ τοὺς ὑπολογισμοὺς θεωροῦμεν ὅτι ὅλαι αἱ τιμαὶ αἱ ὁποῖαι εὐρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ διάστημα καταλαμβάνουν τὸ μέσον αὐτοῦ. Ὅμως ἡ ἀπώλεια πληροφοριῶν καὶ ἀκριβείας δὲν εἶναι μεγάλη, ἐὰν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι εἰς ἓνα διάστημα τάξεως θὰ ὑπάρχουν τιμαὶ μεγαλύτεραι καὶ μικρότεραι τοῦ μέσου τοῦ διαστήματος. Συνεπῶς, ὁ μέσος ὅρος τῶν τιμῶν τῶν εὐρισκομένων εἰς ἓνα διάστημα δὲν θὰ ἀπέχη πολὺ τοῦ μέσου τοῦ διαστήματος. Προφανῶς, ὅσον μικρότερον εἶναι τὸ εὖρος τοῦ διαστήματος, τόσον καὶ τὸ σφάλμα ὁμαδοποιήσεως εἶναι μικρότερον.

Α

Ἐξετάσωμεν ἓνα παράδειγμα εἰς τὸ ὁποῖον ἔγινεν ὁμαδοποίησις τῶν δεδομένων. Ὁ πίναξ 19 περιλαμβάνει 7 διαστήματα ἑκαστον τῶν ὁποίων περιέχει δύο τιμὰς. Ὡς πρῶτον διάστημα ἔχει θεωρηθῇ τὸ περιέχον τὰς τιμὰς 7 καὶ 8, ὡς δεύτερον τὸ περιέχον τὰς τιμὰς 9 καὶ 10, κ.ο.κ. Ὅλα τὰ διαστήματα περιέχονται εἰς τὴν στήλην X .

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου ἀκολουθεῖται ἡ ἐξῆς πορεία.

X	Μέσα = X_μ	f	$X_\mu - \bar{X}_v = x$	fx	$X_\mu - \bar{X}_v = x$	fx
7-8	7,5	2	-8	-16	-6	-12
9-10	9,5	3	-6	-18	-4	-12
11-12	11,5	5	-4	-20	-2	-10
						(-34)
13-14	13,5	9	-2	-18	0	0
				(-72)		(+72)
15-16	15,5	10	0	0	+2	+20
				(+30)		
17-18	17,5	7	+2	+14	+4	+28
19-20	19,5	4	+4	+16	+6	+24
		$\Sigma f = 40$		$\Sigma fx = -42$		$\Sigma fx = +38$

Πίναξ 19

(1) Εὐρίσκομεν τὰ μέσα τῶν διαστημάτων τῶν τάξεων. Τὸ μέσον τοῦ διαστήματος 7-8 ἰσοῦται με $\frac{7+8}{2} = 7,5$. Τὸ μέσον τοῦ διαστήματος 9-10 ἰσοῦται με $\frac{9+10}{2} = 9,5$. Ὁμοίως καὶ τὰ μέσα τῶν ὑπολοίπων διαστημάτων. Τὰ μέσα τῶν διαστημάτων τὰ συμβολίζομεν με X_μ .

(2) Ἐκλέγομεν ὡς ὑποθετικὸν μέσον τὸν $\bar{X}_v = 15,5$, ὁ ὁποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς ἐκ τῶν X_μ ὁ ὁποῖος ἔχει τὴν μεγαλυτέραν συχνότητα.

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \text{Ὑπολογίζομεν τὰς διαφορὰς} \quad X_\mu - \bar{X}_v &= x \\
 7,5 - 15,5 &= -8 \\
 9,5 - 15,5 &= -6 \\
 11,5 - 15,5 &= -4
 \end{aligned}$$

Αἱ ὑπόλοιποι διαφοραὶ ἔχουν καταγραφῇ εἰς τὴν στήλην 4.

(4) Ἀκολουθεῖ ἡ εὔρεσις τῶν γινομένων τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τῶν στηλῶν f καὶ x .

$$fx = 2(-8) = -16$$

$$fx = 3(-6) = -18$$

$$fx = 5(-4) = -20$$

Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον εὐρίσκονται καὶ τὰ ἄλλα γινόμενα. Τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν (-72) καὶ τῶν θετικῶν ἀριθμῶν $(+30)$ ἰσοῦται μὲ $\Sigma fx = -42$.

(5) Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὸν τύπον

$$\bar{X} = \bar{X}_v + \frac{\Sigma fx}{N}$$

$$\bar{X} = 15,5 + \frac{-42}{40} = 14,45$$

Ἄς εὕρωμεν τὸν ἀριθμητικὸν μέσον τῶν δεδομένων τοῦ ἰδίου πίνακος 19, ὅταν ληφθῇ ὡς ὑποθετικὸς μέσος ὁ ἀριθμὸς $\bar{X}_v = 13,5$.

Αἱ νέαι ἀλγεβρικοὶ διαφοραὶ $X_\mu - \bar{X}_v = x$ ἔχουν δώσει τὰς ἀναγραφόμενας εἰς τὴν στήλην 6 τιμὰς. Ἡ τελευταία στήλη περιλαμβάνει τὰ γινόμενα fx , τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα $\Sigma fx = +38$. Ἀντικαθιστῶντες τὰς εὐρεθείσας τιμὰς εἰς τὸν τύπον

$$\bar{X} = \bar{X}_v + \frac{\Sigma fx}{N} \quad \text{λαμβάνομεν}$$

$$\bar{X} = 13,5 + \frac{38}{40} = 14,45$$

Μὲ διαφορετικοὺς ὑποθετικοὺς ἔχομεν εὕρει τὴν αὐτὴν τιμὴν τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου.

B

Μία τελευταία μέθοδος, ἀπλουστέρα εἰς τὰς πράξεις, συγκρινομένη μὲ τὰς προηγουμένας μεθόδους, εἶναι ἡ ἀναφερομένη εἰς τὸν πίνακα 20.

Αἱ στήλαι 1, 2 καὶ 3 εἶναι αἱ αὐταὶ τοῦ πίνακος 19. Ὅμως, μετὰ τὴν ἐκλογὴν τοῦ $\bar{X}_v = 15,5$ δὲν λαμβάνομεν τὰς ἀλγεβρικοὺς διαφορὰς $X_\mu - \bar{X}_v = x$, ἀλλὰ τοποθετοῦμεν εἰς τὴν στήλην u καὶ εἰς τὴν ὀριζόντιον γραμμὴν τοῦ ὑποθετικοῦ μέσου τὸν ἀριθμὸν 0. Ἐνῶθεν αὐτοῦ θέτομεν διαδοχικῶς τοὺς ἀριθμοὺς $-1, -2, -3, -4, \dots$ καὶ κάτωθεν τοῦ μηδενὸς τοὺς ἀριθμοὺς $+1, +2, +3, +4, \dots$. Οὕτω ἔχει δημιουργηθῇ ἡ στήλη u . Εἰς τὴν πραγματικότητά ἡ στήλη u εἶναι τὸ ἀποτέλεσμα τῶν πράξεων

$$\frac{X_\mu - \bar{X}_v}{c} = \frac{x}{c} = u$$

Ἡ πέμπτῃ στήλῃ τοῦ πίνακος 20 περιλαμβάνει τὰ γινόμενα fu , τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα $\Sigma fu = -21$. Εἰς αὐτὴν καὶ μόνον τὴν περίπτωσιν εἴμεθα ὑποχρεωμένοι νὰ μετατρέψωμεν τὸν τύπον 4.6 εἰς τὸν

$$4.7 \quad \bar{X} = \bar{X}_v + c \cdot \frac{\Sigma fu}{N}$$

ὅπου c τὸ εὖρος τῶν διαστημάτων τῶν τάξεων. Δι' ἀντικαταστάσεως λαμβάνομεν

$$\bar{X} = 15,5 + 2 \cdot \frac{(-21)}{40} = 14,45$$

Καμμία διαφορὰ εἰς τὴν ἀπάντησιν.

X	Μέσα	f	u	fu
7- 8	7,5	2	- 4	- 8
9-10	9,5	3	- 3	- 9
11-12	11,5	5	- 2	-10
13-14	13,5	9	- 1	- 9
				(- 36)
15-16	15,5	10	0	0
				(+ 15)
17-18	17,5	7	+ 1	+ 7
19-20	19,5	4	+ 2	+ 8
		$\Sigma f = 40$		$\Sigma fu = - 21$

Πίναξ 20

ΣΥΓΚΡΙΣΙΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΥ ΜΕΣΟΥ — ΔΙΑΜΕΣΟΥ — ΕΠΙΚΡΑΤΟΥΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

Μία σύγκρισις τῶν τριῶν κεντρικῶν ροπῶν εἶναι χρήσιμος, ὅταν ὁμιλῶμεν διὰ τὴν αὐτὴν κατανομὴν συχνοτήτων.

Ὡς γνωρίζομεν, ὁ ἀριθμητικὸς μέσος εἶναι ἡ κεντρικὴ ροπή ἡ ὁποία προκύπτει ἐκ τοῦ πηλίκου τοῦ ἄθροισματος ὅλων τῶν τιμῶν τῶν δεδομένων διὰ τοῦ πληθικοῦ ἀριθμοῦ αὐτῶν.

Ἡ διάμεσος εἶναι ἓνας ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος κεῖται εἰς τὸ μέσον μιᾶς σειρᾶς διατεταγμένων ἀριθμῶν. Τὸ $\frac{1}{2}$ ἐξ αὐτῶν εἶναι μεγαλύτερον τῆς διαμέσου καὶ τὸ ὑπόλοιπον $\frac{1}{2}$ εἶναι μικρότερον αὐτῆς.

Ἐπικρατοῦσα εἶναι ἡ τιμὴ ἡ ὁποία ἐδόθη τὸ πλεῖστον εἰς ἓνα σύνολον ἀριθμῶν.

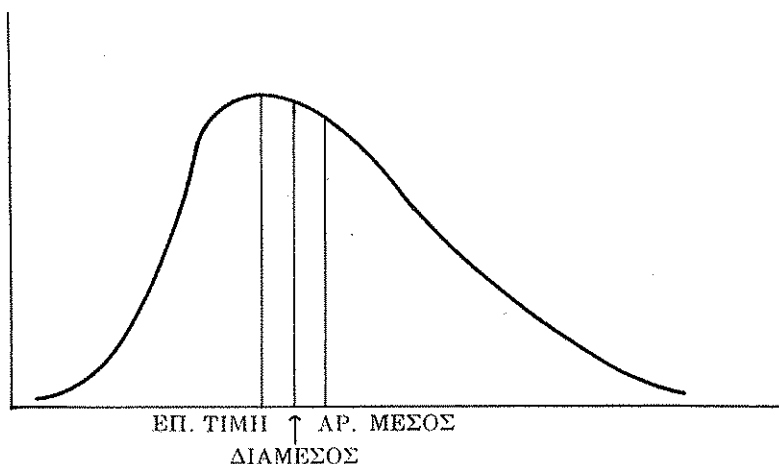
Ἐστω μία κατανομὴ συχνότητων ὑπὸ μορφήν γραφικῆς παραστάσεως. Ὁ ἀριθμητικὸς μέσος εἶναι ἓνα σημεῖον τοῦ ὀριζοντίου ἄξονος, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ κέντρον βάρους τῆς κατανομῆς.

Ἡ διάμεσος εἶναι ἐπίσης σημεῖον τοῦ ὀριζοντίου ἄξονος, ἐκ τοῦ ὁποῖου σημείου ἡ κάθετος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν X θὰ τμήσῃ τὸ ἐμβαδὸν τὸ περιεχόμενον κάτωθεν τῆς καμπύλης εἰς δύο ἴσα μέρη.

Τέλος ἡ ἐπικρατοῦσα τιμὴ εἶναι ἓνα σημεῖον τοῦ ἄξονος τῶν X , τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ ὑψηλότερον σημεῖον τῆς καμπύλης.

Ὅταν ἡ κατανομὴ συχνότητων εἶναι συμμετρικὴ, τότε αἱ τρεῖς κεντρικαὶ ροπαὶ συμπίπτουν. Διὰ μὴ συμμετρικὰς καμπύλας, ὑπάρχει διαφορὰ μεταξύ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου, τῆς διαμέσου καὶ τῆς ἐπικρατούσης τιμῆς.

Ὅταν ἡ κατανομὴ εἶναι **θετικῶς λοξή** (positively skewed), ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχ. 19, ὁ ἀριθμητικὸς μέσος κεῖται εἰς τὰ δεξιὰ τῆς ἐπικρατούσης τιμῆς καὶ τῆς διαμέσου, ἐνῶ ἡ διάμεσος κεῖται μετὰ τὸ ἀριθμητικὸν μέσον καὶ τῆς ἐπικρατούσης τιμῆς.



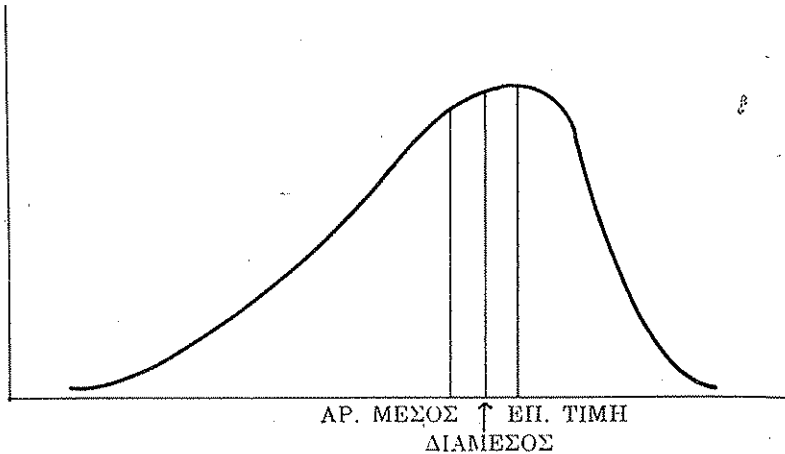
Σχ. 19

Ἐὰν ἡ κατανομὴ εἶναι **ἀρνητικῶς λοξή** (negatively skewed), ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχ. 20, ὁ ἀριθμητικὸς μέσος κεῖται ἀριστερὰ τῆς διαμέσου καὶ τῆς ἐπικρατούσης τιμῆς, ἐνῶ ἡ διάμεσος ὡς καὶ προηγουμένως, κεῖται μετὰ τὸ ἀριθμητικὸν μέσον καὶ τῆς ἐπικρατούσης τιμῆς.

Μεταξὺ τῶν τριῶν κεντρικῶν ροπῶν προτιμᾶται ὁ ἀριθμητικὸς μέσος

λόγω τοῦ εὐκόλου ὑπολογισμοῦ καὶ ἐπειδὴ παρέχει τὴν καλυτέραν ἐκτίμῃσιν τάσεως τῶν δεδομένων τοῦ πληθυσμοῦ.

Ἀνεξαρτήτως αὐτοῦ, ὑπάρχει μία περίπτωση κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ διάμεσος ἀποδίδει καλὺτερον τὴν περιγραφὴν τῶν δεδομένων.



Σχ. 20

Ἐστω π.χ. αἱ τιμαὶ 4, 5, 7, 7, 7, 10, 95. Ὁ ἀριθμητικὸς μέσος αὐτῶν τῶν δεδομένων εἶναι

$$\bar{X} = \frac{4 + 5 + 7 + 7 + 7 + 10 + 95}{7} = \frac{135}{7} = 19\frac{2}{7}$$

ἡ δὲ διάμεσος ἰσοῦται μὲ 7.

Μεταξὺ τῶν δύο τιμῶν, ἡ διάμεσος χαρακτηρίζει καλὺτερον τὴν τάσιν τῶν δεδομένων καὶ ὅχι ὁ ἀριθμητικὸς μέσος.