

3. ΜΟΡΙΑ

ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΩΝ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ

Εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον ἔχομεν ἐξετάσει διαφόρους μεθόδους παρουσιάσεως στατιστικῶν στοιχείων γραφικῶς, ὡς αἱ πολυγωνικαὶ γραμμαὶ καὶ τὰ ἱστογράμματα.

Ὁ πῖναξ 10, παρουσιάζει τοὺς βαθμοὺς μιᾶς ομάδος μαθητῶν πλήθους $N = 42$. Ἡ πρώτη στήλη περιλαμβάνει τοὺς βαθμοὺς τῶν μαθητῶν καὶ ἡ δευτέρα στήλη τὰ ἀκριβῆ ὅρια, ἐντὸς τῶν ὁποίων κεῖνται οἱ ἀντίστοιχοι βαθμοί. Ὁ βαθμὸς 10, ὁ ὁποῖος ἐδόθη, εἶναι ἐκεῖνος ὁ ὁποῖος ἀντιπροσωπεύει τὴν ομάδα τῶν βαθμῶν, οἱ ὁποῖοι περιέχονται εἰς τὸ διάστημα $9,5-10,5^-$. Πολὺ πιθανὸν ὁ βαθμὸς 10 νὰ ᾔτο $9,6$ ἢ $10,3$.

Ἐκαστος ἀριθμὸς τῆς στήλης f παριστᾷ τὸ πλῆθος τῶν μαθητῶν, οἱ ὁποῖοι ἔχουν πᾶρει βαθμοὺς τοὺς ἀντιστοίχους τῆς στήλης 1.

Βαθμοὶ μαθητῶν X		f	Ἀθροιστικὴ συχνότης cf	Ἐκατοστημόρια
10	$9,5-10,5^-$	1	1	2,38
11	$10,5-11,5^-$	2	3	7,14
12	$11,5-12,5^-$	4	7	16,67
13	$12,5-13,5^-$	5	12	28,57
14	$13,5-14,5^-$	7	19	45,24
15	$14,5-15,5^-$	8	27	64,29
16	$15,5-16,5^-$	6	33	78,57
17	$16,5-17,5^-$	4	37	88,10
18	$17,5-18,5^-$	3	40	95,24
19	$18,5-19,5^-$	2	42	100
		$N = 42$		

Πῖναξ 10

Ἡ ἐπομένη στήλη, ἡ ὁποία συμβολίζεται μὲ cf , ἔχει ληφθῇ κατὰ τὸν ἐξῆς τρόπον: Ἐνας μαθητῆς ἐπῆρε βαθμὸν 10. Τὸν ἀριθμὸν 1 τὸν θέτομεν

πρώτον εἰς τὴν στήλην *cf.* Τρεῖς μαθηταὶ (1 + 2) ἐπῆραν βαθμοὺς ἴσους ἢ μικροτέρους τοῦ 11. Τὸν ἀριθμὸν 3 τὸν τοποθετοῦμεν ἀμέσως μετὰ τὸ 1. Ὅμοιως ἐπτά μαθηταὶ (1 + 2 + 4) ἐπῆραν βαθμοὺς ἴσους ἢ μικροτέρους τοῦ 12. Ὁ ἀριθμὸς 7 τοποθετεῖται μετὰ τὸν ἀριθμὸν 3. Ἐργαζόμενοι μὲ τὸν ἴδιον τρόπον λαμβάνομεν καὶ τοὺς ὑπολοίπους ἀριθμοὺς τῆς στήλης *cf.* Ὁ τελευταῖος ἀριθμὸς τῆς στήλης *cf.* τὸ 42, πρέπει νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ πλῆθος *N* ὅλων τῶν περιπτώσεων. Ἡ ἰσότης τῶν δύο ἀριθμῶν χρησιμοποιεῖται ὡς ἔλεγχος τῶν πράξεών μας.

Ἡ στήλη αὐτὴ μᾶς δίδει τὴν **κατανομὴν τῶν ἀθροιστικῶν συχνοτήτων** (cumulative frequency distribution). Ἀπὸ τοὺς πίνακας τῶν ἀθροιστικῶν συχνοτήτων δυνάμεθα εὐκόλως νὰ εὗρωμεν τὸ πλῆθος τῶν μαθητῶν, οἱ ὅποιοι ἔχουν βαθμοὺς μικροτέρους ἢ μεγαλυτέρους ἐνὸς δοθέντος. Οὕτω εἴμεθα εἰς θέσιν νὰ γνωρίζωμεν πόσοι μαθηταὶ ἔχουν πάρεϊ βαθμοὺς μικροτέρους ἢ μεγαλυτέρους τοῦ 14, 15, 16 κ.ο.κ.

S ΠΟΛΥΤΩΝΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ

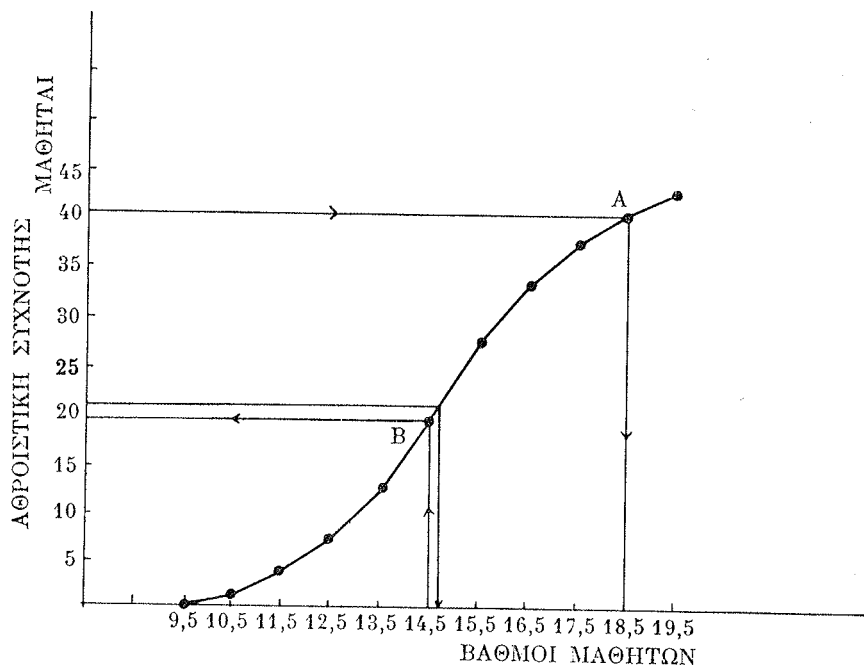
Ἐνας οἰοσδήποτε πίναξ ἀθροιστικῶν συχνοτήτων μᾶς δίδει ἀρκετὰς πληροφορίας διὰ τὸ εἶδος τῆς κατανομῆς. Ὅμως ἡ γραφικὴ παρουσίασις των θὰ μᾶς δώσῃ ἐποπτικὴν εἰκόνα τῆς κατανομῆς καὶ θὰ δυνηθῶμεν ἐξ αὐτῆς νὰ κάμωμεν διαφόρους ἀντιστοιχίας μεταξὺ κάποιας ιδιότητος τῶν στοιχείων καὶ τῶν στοιχείων αὐτοῦ τούτου τοῦ συνόλου.

Τὰ ἀκριβῆ ὅρια τῶν βαθμῶν τῶν μαθητῶν (πίν. 10) σημειώνονται ἐπὶ τοῦ ὀριζοντίου ἄξονος καὶ αἱ ἀθροιστικαὶ συχνότητες ἐπὶ τοῦ κατακόρυφου (σχ. 13). Εἶναι ἐπιθυμητὸν ὅπως αἱ ὑποδιαίρέσεις τῶν δύο ἄξόνων ληφθῶν κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε ὁ λόγος τοῦ μήκους τῶν τιμῶν τοῦ ἄξονος τῶν ἀθροιστικῶν συχνοτήτων πρὸς τὸ μήκος τῶν τιμῶν τοῦ ὀριζοντίου ἄξονος νὰ εἶναι ἴσος μὲ $\frac{2}{3}$ ἢ $\frac{3}{4}$. Ἡ μὴ συμμόρφωσις πρὸς τὸν ἀνωτέρω περιορισμὸν εἶναι δυνατὸν νὰ μᾶς ὀδηγήσῃ εἰς ἀνακριβεῖς ἀντιστοιχίας.

Ἐδῶ πρέπει νὰ τονισθῇ ἡ διαφορὰ παραστάσεως τῶν συχνοτήτων γραφικῶς καὶ τῶν ἀθροιστικῶν συχνοτήτων. Εἰς τὴν εὑρεσιν τοῦ πολυγώνου συχνοτήτων εἴχομεν λάβει εἰς κάθε διάστημα τάξεως τὸ μέσον του καὶ εἴχομεν ὑψώσει κατακόρυφον, τῆς ὁποίας τὸ ὕψος ἰσοῦτο πρὸς τὴν ἀντίστοιχον συχνότητα. Διὰ τὴν εὑρεσιν τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς τῶν ἀθροιστικῶν συχνοτήτων ὑψώνομεν κατακόρυφον, ἴσην πρὸς τὴν ἀντίστοιχον ἀθροιστικὴν συχνότητα, εἰς τὸ ἀκριβὲς ἀνώτερον ὅριον ἐκάστου διαστήματος καὶ ὅχι εἰς τὸ μέσον του. Ὁ λόγος γίνεται περισσότερον κατανοητὸς ἐκ τοῦ τρόπου δημιουργίας τῆς στήλης τῶν ἀθροιστικῶν συχνοτήτων (πίν. 10). Λέγομεν ὅτι ὑπάρχουν 37 μαθηταὶ μὲ βαθμοὺς ἴσους ἢ μικροτέρους τοῦ 17. Ἀλλὰ τὸ 17 εἶναι ὁ βαθμὸς ὁ ὁποῖος ἀντιπροσωπεύει ἐκείνους οἱ ὅποιοι περιέχονται εἰς τὸ διά-

στημα 16,5-17,5-. Δηλ. εἰς τοὺς 37 μαθητὰς περιλαμβάνονται καὶ ἐκεῖνοι οἱ ὅποιοι ἔχουν βαθμὸν 17,4. Ἐπομένως θὰ ἦτο πλέον ἀκριβὴς ἡ ἔκφρασις, ἐὰν ἐλέγετο ὅτι ὑπάρχουν 37 μαθηταὶ οἱ ὅποιοι ἐπῆραν βαθμοὺς ἴσους ἢ μικροτέρους τοῦ 17,5-.

Ὅταν σημειώσωμεν τὰ διατεταγμένα ζεύγη τῶν τιμῶν τῶν στηλῶν X καὶ cf καὶ ἐνώσωμεν αὐτὰ διαδοχικῶς δι' εὐθυγράμμων τμημάτων, θὰ προκύψῃ ἡ S πολυγωνικὴ γραμμὴ (cumulative curve) (σχ. 13). Ἀπὸ τὴν



Σχ. 13

S πολυγωνικὴν γραμμὴν δυνάμεθα νὰ διαβάσωμεν μὲ ἀρκετὴν ἀκρίβειαν τὸν ἀριθμὸν τῶν μαθητῶν οἱ ὅποιοι ἔλαβον βαθμοὺς μικροτέρους κάποιου δοθέντος, καθὼς καὶ τὴν διαφορὰν ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ δύο ἢ περισσοτέρων ομάδων, αἱ ὁποῖαι ἐπῆραν τὸ ἴδιον test.

Ἐστω ὅτι ζητεῖται ὁ ἀριθμὸς τῶν μαθητῶν οἱ ὅποιοι ἐπῆραν βαθμοὺς μικροτέρους τοῦ 14,5. Ἐκ τοῦ σημείου, εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ ὁ βαθμὸς 14,5, φέρομε κάθετον, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν S πολυγωνικὴν γραμμὴν εἰς ἓνα σημεῖον B. Ἐκ τοῦ σημείου B φέρομεν κάθετον εἰς τὸν ἄξονα τῶν ἀθροιστικῶν συχνοτήτων, ἡ ὁποία θὰ τὸν συναντήσῃ εἰς ἓνα σημεῖον. Τὸ σημεῖον αὐτὸ ἀντιστοι-

χεῖ με τὸν ἀριθμὸν 19 καὶ παριστᾷ τὸ πλῆθος τῶν μαθητῶν με βαθμολογίαν μικροτέραν τοῦ 14,5.

Εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν θὰ ζητηθῇ ὁ βαθμὸς τὸν ὁποῖον ἔλαβεν ὁ 40ὸς μαθητῆς, διατακτικῶς τοποθετηθεὶς, θὰ ἀκολουθήσωμεν τὴν ἀντίθετον πορείαν. Ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ 40 φέρομεν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν X , ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν S πολυγωνικὴν γραμμὴν εἰς τὸ σημεῖον A . Ἀπὸ τὸ A φέρομεν κάθετον ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν X . Ἐκεῖ ὅπου θὰ τὸν τμήσῃ, θὰ δώσῃ τὸν βαθμὸν τοῦ 40οῦ μαθητοῦ, ὁ ὁποῖος εἶναι τὸ 18,5.

ΕΚΑΤΟΣΤΗΜΟΡΙΑ

Ἐπειδὴ εἰς ἐκάστην περίπτωσιν τὸ πλῆθος N τῶν ὑπὸ ἐξέτασιν στοιχείων ποικίλλει, παρουσιάζεται δυσκολία εἰς τὴν σύγκρισιν τῶν ἀθροιστικῶν κατανομῶν. Ὡς ἐκ τούτου, διὰ νὰ ἔχωμεν κοινὸν μέτρον συγκρίσεως, πολλαπλασιάζομεν ἐκάστην τιμὴν τῆς στήλης cf ἐπὶ $\frac{100}{N}$. Ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν τιμῶν τῆς στήλης cf ἐπὶ $\frac{100}{42}$ (πίν. 10), μᾶς δίδεται ἡ στήλη τῶν **ἐκατοστημορίων** (percentiles).

Ἐχει δοθῇ ἡ ὀνομασία αὐτή, ἐπειδὴ τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων τοῦ ὑπὸ ἐξέτασιν συνόλου ἔχει ἀναχθῇ εἰς πλῆθος ἐξ 100 στοιχείων, τὰ ὁποῖα τοποθετοῦνται διατακτικῶς συμφώνως πρὸς κάποιαν ἱκανότητα ἢ ιδιότητά των. Τὰ ἐκατοστημόρια μᾶς παρέχουν ὁμοιόμορφον κλίμακα, με τὴν ὁποίαν ἐπιτυγχάνεται σύγκρισις μεταξὺ τῶν στοιχείων συνόλων οἰοῦδήποτε πλῆθους. Ἐνα συγκεκριμένον ἐκατοστημόριον, θὰ ἀντιπροσωπεύῃ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ἐπιτυχίας εἰς οἰοῦδήποτε test ἢ ἐξέτασιν, ἡ ὁποία θὰ ληφθῇ ἀπὸ δύο σύνολα ἀτόμων, ἴσων ἢ ἀνίσων πληθικῶν ἀριθμῶν.

Ὁ μαθητῆς με ἐπίδοσιν 17 (πίν. 10), μᾶς δίδει ἐκατοστημοριακὴν διάταξιν 88,10. Δι' αὐτὴν τὴν συγκεκριμένην ἐξέτασιν, ὁ μαθητῆς με τὸν βαθμὸν 17 ἔχει ἐπίδοσιν μεγαλυτέραν ἀπὸ τὰ 88,10% τῶν συμμαθητῶν του καὶ μόνον 11,90% ἔχουν ἐπίδοσιν μεγαλυτέραν τοῦ 17.

Γενικῶς ἡ μετατροπὴ τῶν ἀρχικῶν τιμῶν εἰς ἐκατοστημόρια, μᾶς δίδει πληροφoρίας διὰ τὴν ποιότητα τῶν ὑποψηφίων συγκρινομένων με τὴν ἐπίδοσιν ἄλλων ἀτόμων, τὰ ὁποῖα ἔλαβον τὸ ἴδιον test εἰς παλαιότερον χρόνον. Τὰ ἐκατοστημόρια χρησιμοποιοῦνται πολὺ εἰς τὴν ἐκπαίδευσιν καὶ τὴν ψυχολογίαν, ἀλλὰ καὶ εἰς ἄλλους κλάδους, εἰς τοὺς ὁποίους δίδονται διάφορα test εἰς μεγάλον ἀριθμὸν ἀτόμων.

Ὅπως ἔχουν ὑπολογισθῇ τὰ ἐκατοστημόρια, εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ διάστημα τάξεως εἶναι μιᾶς μονάδος, κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον ὑπολογίζονται καὶ τὰ ἐκατοστημόρια εἰς τὰς περιπτώσεις κατὰ τὰς ὁποίας τὸ διάστημα εἶναι μεγαλύτερον τῆς μονάδος.

Οὕτω θεωροῦμεν ὅτι 160 ὑποψήφιοι ἔλαβον μέρος εἰς ἓνα test. Ἡ μικροτέρα ἐπίδοσις ἦτο τὸ 45 καὶ ἡ μεγαλύτερα τὸ 99. Δημιουργοῦμεν διαστήματα τάξεων ἐκ πέντε μονάδων καὶ ὁμαδοποιοῦμεν τὰ δεδομένα (πίν. 11).

Διαστήματα		f	cf	Ἑκατοστημόρια
45-49	44,5-49,5-	3	3	1,875
50-54	49,5-54,5-	7	10	6,250
55-59	54,5-59,5-	12	22	13,750
60-64	59,5-64,5-	16	38	23,750
65-69	64,5-69,5-	24	62	38,750
70-74	69,5-74,5-	28	90	56,250
75-79	74,5-79,5-	24	114	71,250
80-84	79,5-84,5-	20	134	83,750
85-89	84,5-89,5-	14	148	92,500
90-94	89,5-94,5-	9	157	98,125
95-99	94,5-99,5-	3	160	100,000
		$N = 160$		

Πίναξ 11

Προτοῦ εὑρεθοῦν τὰ ἑκατοστημόρια, εἶναι ἀπαραίτητον ὅπως γραφοῦν τὰ ἀκριβῆ ὅρια ἐκάστου διαστήματος τάξεων. Τοῦτο εἶναι ἀπαραίτητον εἰς τὴν γραφικὴν παρουσίαν τῶν ἀθροιστικῶν συχνοτήτων, ὡς ἔχομεν ἤδη ἀναφέρει, ἀλλὰ καὶ εἰς τὸν ὑπολογισμόν τῶν ἑκατοστημορίων διὰ τοῦ τύπου 3.1.

Εἰς τὴν τρίτην στήλην ἔχουν καταγραφῇ αἱ συχνότητες αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἐμφανισθῇ κατὰ τὴν ὁμαδοποίησιν τῶν δεδομένων. Ἡ στήλη τῶν ἀθροιστικῶν συχνοτήτων ἔχει ὑπολογισθῇ διὰ τῆς προσθέσεως διαδοχικῶς τῶν διαφόρων συχνοτήτων, ἦτοι: 1η καταγραφῇ 3

$$2\alpha \text{ καταγραφῇ } 10 = 3 + 7$$

$$3\eta \text{ καταγραφῇ } 22 = 3 + 7 + 12 \text{ κ.ο.κ.}$$

Τὰ ἑκατοστημόρια τῆς τελευταίας στήλης ἔχουν εὑρεθῇ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τῆς στήλης cf ἐπὶ $\frac{100}{N} = \frac{100}{160} = 0,625$ δηλ.

$$3 \cdot 0,625 = 1,875$$

$$10 \cdot 0,625 = 6,250$$

$$22 \cdot 0,625 = 13,750 \quad \text{κ.λ.π.}$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΕΚΑΤΟΣΤΗΜΟΡΙΩΝ

Ἡ εὕρεσις τῶν ἐκατοστημορίων διὰ τῆς γραφικῆς μεθόδου δὲν μᾶς δίδει ἀκρίβειαν πέραν τοῦ ἐκατοστοῦ. Εἰς τὰς περιπτώσεις κατὰ τὰς ὁποίας εἶναι ἀπαραίτητος μεγαλύτερα ἀκρίβεια συνιστᾶται ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ τύπου.

$$3.1 \quad P_p = X_{\kappa} + \frac{c}{f_p} \left(p \cdot \frac{N}{100} - \Sigma f_{\kappa} \right)$$

ὅπου P_p = ἡ τιμὴ τοῦ p ἐκατοστημορίου,

X_{κ} = τὸ ἀκριβὲς κατώτερον ὅριον τοῦ διαστήματος, τὸ ὁποῖον περιλαμβάνει τὸ ἐκατοστημόριον,

c = τὸ εὖρος τῶν διαστημάτων,

f_p = ὁ ἀριθμὸς τῶν περιπτώσεων τοῦ διαστήματος τὸ ὁποῖον περιέχει τὸ ἐκατοστημόριον,

p = ὁ ἀριθμὸς τοῦ ζητουμένου ἐκατοστημορίου,

N = τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων,

Σf_{κ} = τὸ ἄθροισμα τῶν συχνοτήτων μέχρι τῆς τιμῆς X_{κ} .

Ἐπειδὴ ἴσως ὁ τύπος νὰ φαίνεται πολὺπλοκος, δημιουργοῦμεν καὶ τὸν πίνακα 12, ὁ ὁποῖος εἶναι ἀρκετὰ βοθητικὸς καὶ εἶναι ἀποτέλεσμα τῶν δεδομένων τοῦ πίνακος 10.

Ἐστω ὅτι ζητῶ τὸ P_{30} .

Ἐκ τῆς στήλης τῶν ἀθροιστικῶν συχνοτήτων (πίν. 10) εὐρίσκομεν τὸ διάστημα ἐντὸς τοῦ ὁποίου κεῖται ἡ $\frac{30}{100} \cdot 42 = 12,6$ περιπτώσεις. Ἡ 12,6 περιπτώσεις εὐρίσκεται εἰς τὸ διάστημα 13,5-14,5. Τὸ κατώτερον ὅριον αὐτοῦ τοῦ διαστήματος εἶναι τὸ $X_{\kappa} = 13,5$. Ἐντὸς τοῦ διαστήματος 13,5-14,5 ὑπάρχουν $f_p = 7$ περιπτώσεις. Ἐπειδὴ $c = 1$ λαμβάνομεν $\frac{c}{f_p} = \frac{1}{7}$. Τὸ $\Sigma f_{\kappa} = 12$ τὸ εὐρίσκομεν πάλιν ἐκ τῆς στήλης τῶν ἀθροιστικῶν συχνοτήτων μέχρι τοῦ κατωτέρου ὁρίου $X_{\kappa} = 13,5$.

Ἡ ἀντικατάστασις τῶν στοιχείων εἰς τὸν τύπον

$$P_p = X_{\kappa} + \frac{c}{f_p} \left(p \cdot \frac{N}{100} - \Sigma f_{\kappa} \right) \quad \text{δίδει}$$

$$P_{30} = 13,5 + \frac{1}{7} (12,6 - 12) = 13,59$$

Αἱ ὑπολογισθεῖσαι διὰ τοῦ τύπου τιμαὶ P_p (πίν. 12, στήλη 6) δὲν διαφέρουν ἀπὸ τὰς εὐρεθείσας ἐκ τῆς S καμπύλης τιμᾶς (σχ. 14), αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἀναγραφῇ εἰς τὸν πίνακα 14.

Έκατοστη- μόρια p	X_k	$\frac{c}{fp}$	$p \cdot \frac{N}{100}$	Σf_k	P_p
10	11,5	$\frac{1}{4}$	$10 \cdot \frac{42}{100} = 4,2$	3	11,80
20	12,5	$\frac{1}{5}$	$20 \cdot \frac{42}{100} = 8,4$	7	12,78
30	13,5	$\frac{1}{7}$	$30 \cdot \frac{42}{100} = 12,6$	12	13,59
40	13,5	$\frac{1}{7}$	$40 \cdot \frac{42}{100} = 16,8$	12	14,19
50	14,5	$\frac{1}{8}$	$50 \cdot \frac{42}{100} = 21$	19	14,75
60	14,5	$\frac{1}{8}$	$60 \cdot \frac{42}{100} = 25,2$	19	15,28
70	15,5	$\frac{1}{6}$	$70 \cdot \frac{42}{100} = 29,4$	27	15,90
80	16,5	$\frac{1}{4}$	$80 \cdot \frac{42}{100} = 33,6$	33	16,65
90	17,5	$\frac{1}{3}$	$90 \cdot \frac{42}{100} = 37,8$	37	17,77

Πίναξ 12

ΣΠΟΥΔΑΙΟΤΗΣ ΕΚΑΤΟΣΤΗΜΟΡΙΩΝ

Ἡ σπουδαιότης τῶν ἑκατοστημορίων θὰ γίνη πλέον κατανοητὴ ἐκ τῶν κάτωθι δύο παραδειγμάτων.

(α) Οἱ μαθηταὶ ἑνὸς τμήματος, πλήθους $N = 27$, ἐπῆραν τοὺς ἐξῆς βαθμοὺς εἰς μίαν ἐξέτασιν.

98, 95, 90, 89, 88, 88, 84, 83, 81, 80, 76 , 75, 75, 75, 74, 70, 65, 63, 58, 54, 53, 49, 45, 40, 39, 36, 34

Πίναξ 13

Ὁ μαθητὴς μὲ βαθμὸν 76 ἔχει ἐπίδοσιν μεγαλυτέραν τοῦ $\frac{1}{2}$ τῶν συμμαθητῶν του, ἀλλὰ δὲν πλησιάζει τοὺς πολὺ ὑψηλοὺς βαθμοὺς. Ἡ ἀναφορὰ εἰς τὴν ἐπίδοσιν τοῦ ἐν λόγω μαθητοῦ δὲν μᾶς ἐκανοποιεῖ πλήρως. Χρειαζό-

μεθα ἐπὶ πλεόν στοιχεῖα διὰ τὸν καθορισμὸν τῆς θέσεώς του.

Ἐκ τῆς ἀπλῆς διατάξεως τῶν στοιχείων, διαπιστώνομεν ὅτι ὁ βαθμὸς 76 καταλαμβάνει τὴν 11ην θέσιν* ἢ ὅτι ὑπάρχουν 10 μαθηταὶ μὲ ὑψηλοτέραν ἐπίδοσιν ἀπὸ αὐτὸν καὶ 16 μὲ χαμηλοτέραν. Ἀσφαλῶς ἡ νέα πληροφορία μᾶς βοηθεῖ νὰ καθορίσωμεν καλύτερον τὴν ἔννοιαν τοῦ βαθμοῦ 76 εἰς τὸ σύνολον τῶν βαθμῶν τῆς τάξεως.

Ἡ μέθοδος τῶν διατάξεων τῶν στοιχείων ἔχει καὶ ὠρισμένα μειονεκτήματα. Ἐκ τούτων τὸ σπουδαιότερον εἶναι ὅτι δὲν λαμβάνει ὑπ' ὄψιν τὸ μέγεθος τοῦ δείγματος. Πράγματι ὁ ἔχων τὴν 16ην θέσιν εἰς ἓνα σύνολον 16 μαθητῶν δὲν εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸν μαθητὴν, ὁ ὁποῖος ἔχει τὴν 16ην θέσιν εἰς σύνολον 200 μαθητῶν. Εἶναι φανερόν ὅτι εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν πρόκειται περὶ μαθητοῦ ἀδυνάτου, ἐνῶ εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ὁ μαθητὴς εἶναι ἐκ τῶν ἀρίστων.

Ἡ μέθοδος ἡ ὁποία ἐξουδετερώνει αὐτοῦ τοῦ εἵδους τὴν δυσκολίαν εἶναι ἡ ἀναγωγή τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου εἰς ἑκατοστημοριακὴν διάταξιν. Ἡ διάταξις τῶν ἑκατοστημοριῶν διαφέρει τῆς ἀπλῆς διατάξεως, διότι ἐκφράζει τὴν θέσιν ἐκάστου στοιχείου οἰοδῆποτε συνόλου συναρτήσῃ τοῦ 100.

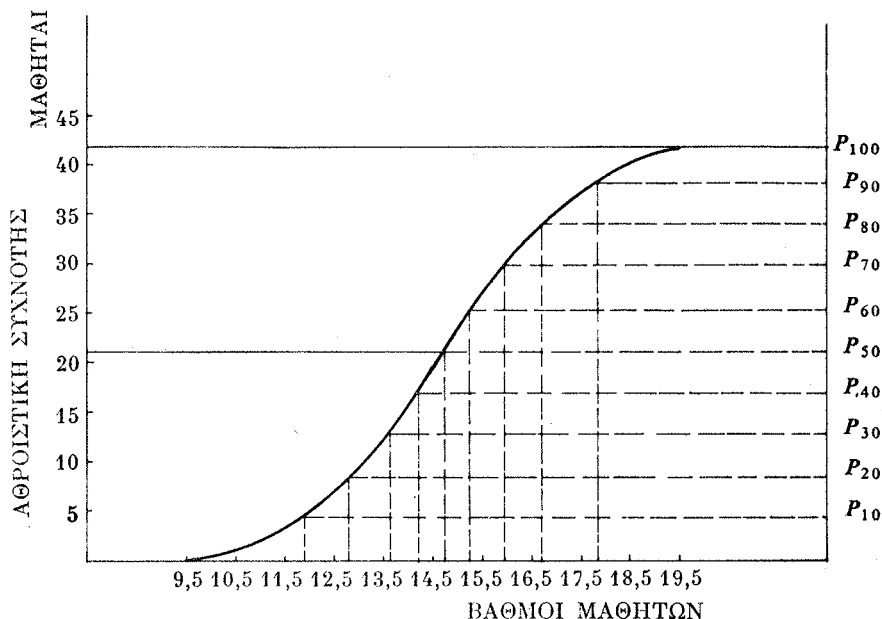
(β) Ἕνας ὑποψήφιος εἰς τὰς προεισαγωγικὰς ἐξετάσεις ἐπῆρεν εἰς τὰ Ἑλληνικὰ 80 μονάδας, εἰς τὰ Μαθηματικὰ 50 καὶ εἰς τὰ Φυσικὰ 60. Ἀπὸ αὐτοὺς τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς πολὺ ὀλίγας πληροφορίας εἴμεθα εἰς θέσιν νὰ ἀποκομίσωμεν. Ἐὰν ὅμως λεχθῇ ὅτι ὁ βαθμὸς 80 τῶν Ἑλληνικῶν ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ 95ον ἑκατοστημόριον, τότε συμπεραίνομεν ἀμέσως ὅτι μόνον 5% τῶν ὑποψηφίων ἔχουν καλύτερον βαθμόν. Ἐπίσης ἐὰν εἰς τὸν βαθμὸν 50 τῶν Μαθηματικῶν ἀντιστοιχεῖ τὸ 75ον ἑκατοστημόριον, τότε καταλήγωμεν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι καὶ εἰς αὐτὸ τὸ μάθημα ἡ ἐπίδοσις τοῦ ὑποψηφίου εἶναι ἱκανοποιητικὴ. Τέλος ἐὰν ὁ βαθμὸς εἰς τὴν Φυσικὴν ἀντιστοιχεῖ μὲ τὸ 23ον ἑκατοστημόριον, θὰ συμπεράνωμεν ὅτι ἡ ἐπίδοσις του δὲν εἶναι ἱκανοποιητικὴ, μολονότι ἐπῆρεν περισσοτέρας μονάδας ἢ εἰς τὰ Μαθηματικὰ. Προφανῶς τὰ ἑκατοστημόρια μᾶς καθιστοῦν ἱκανοὺς νὰ ἐκτιμῇσωμεν τὸ ἐπίπεδον μιᾶς ἐπιδόσεως.

ΔΕΚΑΘΜΟΡΙΑ

Ὅπως ἔχομεν ἀναφέρει ἡ S πολυγωνικὴ γραμμὴ (σχ. 13) προέκυψεν ἀπὸ τὴν ἔνωσιν διαδοχικῶς δι' εὐθυγράμμων τμημάτων τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἐλήφθησαν ἐκ τῶν ἀντιστοιχῶν τιμῶν τῶν διατεταγμένων ζευγῶν X καὶ cf

* Ὅταν ὑπάρχουν μαθηταὶ μὲ τὴν αὐτὴν βαθμολογίαν, ὡς ὁ 5ος καὶ ὁ 6ος, οἱ ὁποῖοι ἐβαθμολογήθησαν μὲ τὸ 88 (πίν. 13), τότε ἀμφότεροι τοποθετοῦνται εἰς τὴν $\frac{5+6}{2} = 5,5$ θέσιν καὶ ἀκολουθεῖ ἡ 7η θέσις διὰ τὸν μαθητὴν μὲ βαθμὸν 84.

(πίν. 10). Ἐὰν αὐτὰ τὰ σημεῖα ἐνωθοῦν διὰ συνεχοῦς γραμμῆς, θὰ προκύψῃ μία καμπύλη (σχ. 14), ἡ ὁποία καλεῖται *S καμπύλη* (ogive). Ἡ ἰδία καμπύλη θὰ προκύψῃ, ἐὰν εἰς τὸν ἄξονα τῶν Y θέσωμεν τὰ ἐκατοστημόρια ἀντὶ τῶν τιμῶν τῶν ἀθροιστικῶν συχνοτήτων.



Σχ. 14

Τὸ ὕψος τῆς *S* καμπύλης τὸ χωρίζομεν εἰς 10 ἴσα μέρη. Εἰς τὰ σημεῖα τομῆς ἀντιστοιχοῦν τὰ ἐκατοστημόρια $P_{10}, P_{20}, \dots, P_{90}$. Τὰ ἐκατοστημόρια αὐτὰ ὀνομάζονται **δεκατημόρια** (deciles) καὶ συμβολίζονται μὲ $D_1, D_2, D_3, \dots, D_9$.

Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ βαθμοῦ, ὁ ὁποῖος ἀντιστοιχεῖ εἰς ἓνα δεκατημόριον, ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν ἐξ αὐτοῦ εὐθεῖαν παράλληλον τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων, ἡ ὁποία θὰ τμήσῃ τὴν καμπύλην εἰς ἓνα σημεῖον. Ἐξ αὐτοῦ φέρομεν κάθετον εἰς τὸν ἴδιον ἄξονα. Τὸ σημεῖον τομῆς εἶναι ὁ ζητούμενος βαθμός. Οὕτω, ἐὰν ἐκ τοῦ P_{30} ἀκολουθήσωμεν τὴν διακεκομμένην γραμμὴν, θὰ διαβάσωμεν τὸν βαθμὸν 13,6. Ὅμοίως διαβάζονται καὶ τὰ ἄλλα δεκατημόρια. Αἱ τιμαὶ τῶν δεκατημορίων ἔχουν γραφῇ εἰς τὸν πίνακα 14.

Ἐκ τοῦ πίνακος 14 κάμνομεν τὰς ἐξῆς ἀντιστοιχίας. Ὁ μαθητὴς μὲ βαθμὸν 15,3 ἔχει ἐκατοστημοριακὴν διάταξιν 60 ἢ δεκατημοριακὴν διάταξιν 6, δηλ. ὁ βαθμὸς 15,3 εἶναι καλύτερος ἀπὸ τὸ 60% τῶν μαθητῶν καὶ μόνον 40% τῶν μαθητῶν ἔχουν βαθμοὺς ὑψηλοτέρους του.

Ἐὰν τὰ στοιχεῖα τοῦ πίνακος 14 εἶχον προέλθει ἀπὸ ἀντιπροσωπευτικὸν

δείγμα, τότε ο πίναξ αὐτός θα ἠδύνατο νὰ θεωρηθῇ ὡς μέτρον συγκρίσεως εἰς μίαν οἰανδήποτε ἄλλην περίπτωσιν, εἰς τὴν ὁποίαν θὰ ἐδίδετο τὸ ἴδιον test. Δηλ. ἐὰν ἓνας μαθητὴς εἰς μίαν ἄλλην περίοδον ἐλάμβανε τὸ ἴδιον test καὶ ἐβαθμολογεῖτο μὲ $16 \approx 15,9$, τότε θὰ ἐλέγομεν ὅτι ἔγραψεν καλύτερον τοῦ 70% τοῦ ἀντιπροσωπευτικοῦ δείγματος.

Δεκατημόρια	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ἑκατοστημόρια	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Βαθμοὶ μαθητῶν	11,8	12,8	13,6	14,2	14,7	15,3	15,9	16,7	17,8

Πίναξ 14

TETARTHMOPIA

Τὸ 50ὸν ἑκατοστημόριον, τὸ ὁποῖον συμβολίζομεν μὲ P_{50} , μᾶς δίδει τὴν τιμὴν 14,7 (σχ. 14) ἡ ὁποία χωρίζει εἰς δύο μέρη τὰ δεδομένα διατακτικῶς τοποθετηθέντα, εἰς τρόπον ὥστε τὰ 50% τῶν περιπτώσεων νὰ ἔχουν τιμὰς μικροτέρας τοῦ 14,7 καὶ τὰ ὑπόλοιπα 50% νὰ ἔχουν τιμὰς μεγαλυτέρας τοῦ 14,7.

Μὲ τὴν αὐτὴν ἔννοιαν ἐρμηνεύονται καὶ τὰ ἑκατοστημόρια P_{25} , P_{75} . Τὰ ἑκατοστημόρια P_{25} , P_{50} , P_{75} χωρίζουν τὴν κλίμακα τῶν βαθμῶν εἰς 4 μέρη καὶ διὰ τοῦτο καλοῦνται **τεταρτημόρια** (quartiles) καὶ συμβολίζονται μὲ Q_1 , Q_2 , Q_3 . Τὰ τεταρτημόρια εἶναι σημεῖα, εἰς τὰ ἀριστερὰ τῶν ὁποίων κεῖνται τὰ $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ καὶ $\frac{3}{4}$ ὅλων τῶν περιπτώσεων. Τὸ δεῦτερον τεταρτημόριον $Q_2 = D_s = P_{50}$, καλεῖται καὶ διάμεσος (βλ. κεφ. 4).

Ἐὰν τὰ δεδομένα εἶναι μικροῦ ἀριθμοῦ καὶ διαταχθοῦν ἀναλόγως κάποιαις ιδιότητός των, τότε θὰ ἐπιζητήσωμεν ἐκεῖνας τὰς τιμὰς αἱ ὁποῖαι πληροῦν τὸν ὁρισμὸν τῶν τεταρτημορίων. Οὕτω ἐὰν ἔχωμεν δείγμα πλήθους $N = 41$ στοιχείων, εὐκόλως εὐρίσκομεν ὅτι τὸ 11ον, 21ον, καὶ 31ον στοιχεῖον μᾶς δίδουν ἀντιστοίχως τὸ Q_1 , Q_2 , Q_3 . Ἐὰν ὅμως τὰ δεδομένα ᾗσαν πλήθους $N = 42$, τότε ἡ εὕρεσις τῶν τεταρτημορίων δὲν θὰ ᾗτο τόσο εὐκόλος. Εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτὰς ὁ καλύτερος κανόνας εἶναι ἡ ἐφαρμογὴ τῶν τύπων

$$\frac{N+1}{4}, \quad \frac{2(N+1)}{4}, \quad \frac{3(N+1)}{4}.$$

Ὅταν τὰ δεδομένα εἶναι ὁμαδοποιημένα, τότε καὶ οἱ τύποι

$$\frac{N}{4}, \quad \frac{2N}{4}, \quad \frac{3N}{4}$$

θεωροῦνται ἱκανοποιητικοί.

Γενικῶς διὰ τὸν ὑπολογισμόν τῶν τεταρτημορίων χρησιμοποιεῖται ἡ ἰδία μέθοδος, ὡς καὶ εἰς τὴν εὔρεσιν τῶν ἑκατοστημορίων.

Ἐστω ὅτι ζητεῖται ἡ εὔρεσις τοῦ Q_2 γραφικῶς (σχ. 14). Εὐρίσκομεν κατ' ἀρχὴν τὸ $\frac{2N}{4} = \frac{2 \cdot 42}{4} = 21$ εἰς τὸν ἄξονα τῶν ἀθροιστικῶν συχνοτήτων καὶ φέρομεν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν βαθμῶν τῶν μαθητῶν. Εἰς τὸ σημεῖον τὸ ὁποῖον θὰ συναντήσῃ τὴν S καμπύλην, φέρομεν κάθετον ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν βαθμῶν τῶν μαθητῶν. Ἡ τιμὴ ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν ἄξονα αὐτὸν εἶναι τὸ $Q_2 = 14,7$. Ὁμοίως ὑπολογίζονται καὶ τὰ Q_1 καὶ Q_3 .

Τὰ τεταρτημόρια μᾶς παρέχουν μίαν ἀξιόπιστον πηγὴν ἐξαγωγῆς συμπερασμάτων ὡς πρὸς τὴν ἔκτασιν τῶν τιμῶν τῶν στοιχείων.

Ὅπως εἶναι γνωστὸν, ἡ δειγματικὴ κύμανσις μᾶς δίδει τὸ διάστημα ἐντὸς τοῦ ὁποίου κεῖνται ὅλαι αἱ τιμαὶ τῶν στοιχείων εἰς μίαν κατανομὴν συχνοτήτων, ἀπὸ τῆς μικροτέρας μέχρι τῆς μεγαλυτέρας. Ἐνα σημαντικὸν μειονέκτημα τῆς δειγματικῆς κυμάνσεως εἶναι ὅτι στηρίζεται ἐπὶ τῶν δύο ἀκραίων τιμῶν. Ἐὰν συμβῇ εἰς τὸ ἓνα ἄκρον ἢ εἰς ἀμφότερα τὰ ἄκρα νὰ ὑπάρχουν ἀπομεμακρυσμένοι τιμαὶ ἐκ τοῦ κυρίου ὅγκου των, τότε ἡ δειγματικὴ κύμανσις δὲν θὰ ἀντιπροσωπεύῃ ἀντικειμενικῶς τὴν ἔκτασιν τῶν δεδομένων.

Διὰ νὰ παρακαμφθῇ τὸ μειονέκτημα τῆς δειγματικῆς κυμάνσεως, ὑπολογίζεται τὸ διάστημα μεταξὺ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου τεταρτημορίου. Εἰς αὐτὸ τὸ διάστημα περιέχονται τὰ 50% τῶν δεδομένων. Ἐχουν παραλειφθῇ τὰ 25% τῶν μικροτέρων καὶ τὰ 25% τῶν μεγαλυτέρων μετρήσεων.

Τὸ διάστημα τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ τρίτου τεταρτημορίου καλεῖται **ἐνδοτεταρτημοριακὴ δειγματικὴ κύμανσις** (interquartile range) καὶ ἀναφέρεται εἰς τὰ 50% τῶν περιπτώσεων εἰς τὸ μέσον μιᾶς κατανομῆς.

Εἰς μερικὰς περιπτώσεις ἀντὶ τῆς διαφορᾶς $Q_3 - Q_1$ προτιμᾶται ἡ ἡμι-διαφορὰ $\frac{Q_3 - Q_1}{2}$, ἡ ὁποία καλεῖται **ἡμι-ἐνδοτεταρτημοριακὴ δειγματικὴ κύμανσις** (semi-interquartile range). Ἐκ τοῦ σχ. 14 διαβάζομεν ὅτι εἰς τὸ Q_3 ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ 16,4 καὶ εἰς τὸ Q_1 ἡ τιμὴ 13,2. Ἐξ αὐτῶν λαμβανόμεν τὴν ἐνδοτεταρτημοριακὴν δειγματικὴν κύμανσιν.

$$Q_3 - Q_1 = 16,4 - 13,2 = 3,2$$

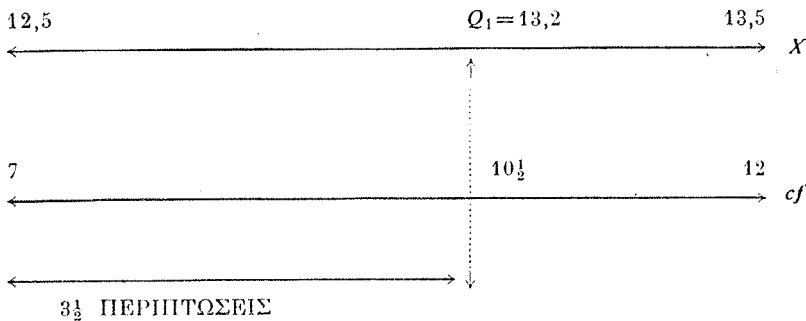
ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΩΝ

Διὰ τὴν εὔρεσιν τῶν τεταρτημορίων ὑπολογιστικῶς, ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως, μὲ βάσιν τὰ δεδομένα τοῦ πίνακος 10.

Ἐστω ὅτι ζητεῖται ἡ τιμὴ ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ Q_1 . Τὸ πλῆθος

τῶν στοιχείων εἶναι $N = 42$. Εὐρίσκομεν κατ' ἀρχὴν τὸ $\frac{1}{4}$ τῶν N περιπτώσεων. Ἐν προκειμένῳ $\frac{N}{4} = \frac{42}{4} = 10\frac{1}{2}$.

Ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἔχει τὴν ἔννοιαν ὅτι τὸ Q_1 εὐρίσκεται μεταξύ τῆς 10ης καὶ 11ης περιπτώσεως. Μετὰ εὐρίσκομεν τὸ διάστημα ἐντὸς τοῦ ὁποῦ περιλαμβάνεται ἡ $10\frac{1}{2}$ περίπτωση. Ἡ περίπτωση $10\frac{1}{2}$ κεῖται εἰς τὸ διάστημα $12,5 - 13,5^-$. Εἰς τὰ δύο ὅρια τοῦ διαστήματος ἀντιστοιχοῦν αἱ ἀθροιστικαὶ συχνότητες 7 καὶ 12 (βλ. καὶ σχ. 15). Θεωροῦμεν ὅτι αἱ 5 περιπτώσεις ($12 - 7 = 5$) τοῦ διαστήματος $12,5 - 13,5^-$ κατανέμονται ὁμοιόμορφως. Κατὰ



Σχ. 15

συνέπειαν, $3\frac{1}{2}$ περιπτώσεις, ἀπὸ τὴν 7ην ἕως τὴν $10\frac{1}{2}$, θὰ εἶναι μικρότεροι τοῦ Q_1 καὶ $1\frac{1}{2}$ περιπτώσεις, ἀπὸ τὴν $10\frac{1}{2}$ ἕως τὴν 12ην περίπτωση, θὰ εἶναι μεγαλύτεροι τοῦ Q_1 . Αἱ $3\frac{1}{2}$ περιπτώσεις καταλαμβάνουν τὰ $\frac{3\frac{1}{2}}{5}$ τοῦ διαστήματος $12,5 - 13,5^-$, τοῦ ὁποῦ τὸ εὖρος εἶναι 1 μονάδα. Κατὰ συνέπειαν, τὸ Q_1 θὰ ἀπέχη κατὰ $\frac{3\frac{1}{2}}{5} \cdot 1 = \frac{7}{10}$ ἐκ τοῦ κατωτέρου ὁρίου 12,5, δηλ.
 $Q_1 = 12,5 + \frac{7}{10} = 13,2$.

Τὸ Q_1 ὑπολογίζεται καὶ ἐκ τοῦ τύπου

$$3.2 \quad Q_1 = X_k + \frac{c}{f_r} \left(\frac{N}{4} - \Sigma f_k \right)$$

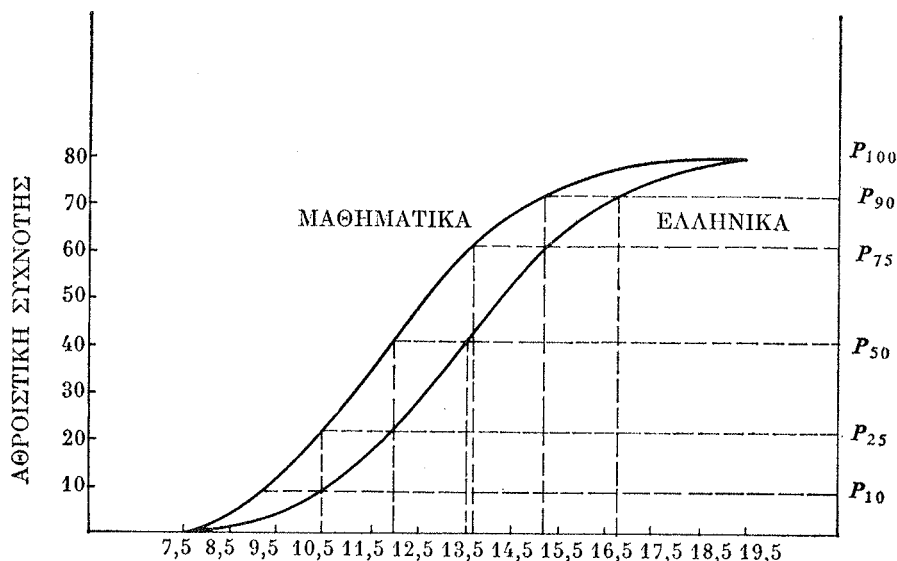
Ἐπειδὴ $Q_1 = P_{25}$, ὁ τύπος αὐτὸς εἶναι εἰδικῆς μορφῆς τοῦ τύπου 3.1, ὁ ὁποῖος μᾶς δίδει τὰ ἑκατοστημόρια (βλ. σελ. 27).

ΣΥΓΚΡΙΣΙΣ ΔΥΟ S ΚΑΜΠΥΛΩΝ

Αἱ S καμπύλαι, ὡς γνωστὸν, παρέχουν μεθόδους συγκρίσεως τῶν ἀποτελεσμάτων N ὑποψηφίων εἰς δύο διαφορετικὰς ἐξετάσεις ἢ τῶν ἀποτελεσμάτων

δύο ομάδων υποψηφίων οι οποίοι έλαβον τὸ ἴδιον test.

Τὸ σχ. 16 ἔχει ληφθῇ ἐκ τῶν ἀποτελεσμάτων 80 μαθητῶν εἰς δύο ἐξετάσεις, εἰς τὰ Μαθηματικά καὶ εἰς τὰ Ἑλληνικά.



Σχ. 16

Ἐκ τῶν δύο καμπυλῶν δυνάμεθα νὰ ἐξαγάγωμεν τὰ ἐξῆς συμπεράσματα.

(α) Ὅλοι οἱ μαθηταὶ, καὶ οἱ ἀδύνατοι καὶ οἱ ἄριστοι, ἐπῆραν βαθμοὺς ὑψηλοτέρους εἰς τὰ Ἑλληνικά παρὰ εἰς τὰ Μαθηματικά. Ἡ ἔκτασις τῆς διαφορᾶς εἰς τὴν βαθμολογίαν δίδεται ἐκ τῆς ἀποστάσεως τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τῶν δύο καμπυλῶν. Αἱ ἀποστάσεις ποικίλλουν εἰς τὰ διάφορα ἐπίπεδα. Δὲν ὑπάρχει σημαντικὴ διαφορὰ μεταξὺ τῶν μαθητῶν οἱ ὅποιοι ἐπῆραν ὑψηλοὺς ἢ χαμηλοὺς βαθμοὺς. Μεταξὺ ὅμως αὐτῶν τῶν ὁρίων ἡ διαφορὰ εἶναι μεγάλη.

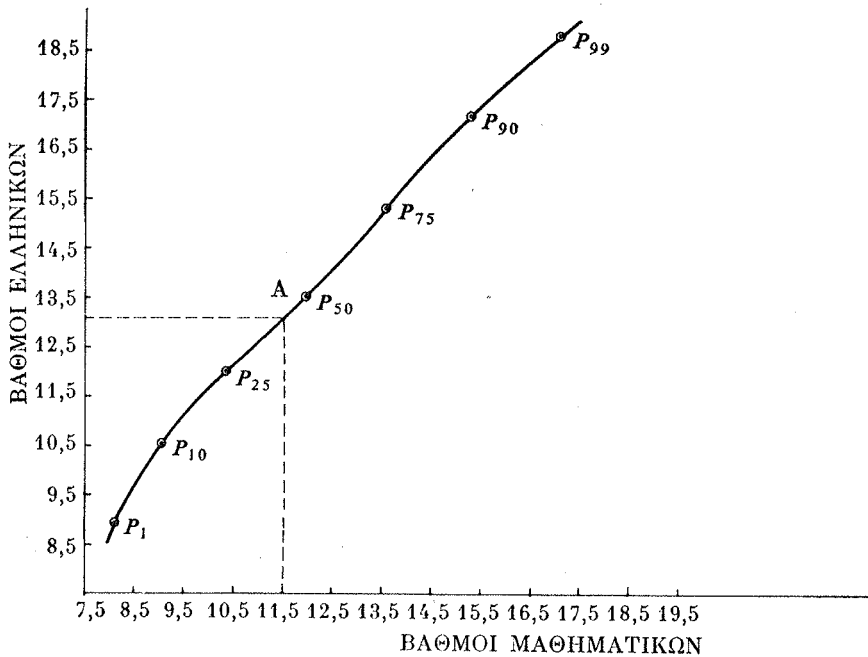
(β) Ἡ διάμεσος ἢ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ 50ὸν ἑκατοστημόριον εἰς τὰ Ἑλληνικά εἶναι 13,5, ἐνῶ εἰς τὰ Μαθηματικά εἶναι 12. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ 50% ὅλων τῶν περιπτώσεων ἐπῆραν βαθμοὺς εἰς τὰ Ἑλληνικά μεγαλύτερους τοῦ 13,5, ἐνῶ εἰς τὰ Μαθηματικά τὸ 50% ἔλαβεν βαθμοὺς ἀπὸ τὸ 12 καὶ ἥνω.

(γ) Ἡ ἐνδοτεταρτημοριακὴ δειγματικὴ κύμανσις εἶναι διὰ
 τὰ Ἑλληνικά $Q_3 - Q_1 = 15,3 - 12 = 3,3$ καὶ διὰ
 τὰ Μαθηματικά $Q_3 - Q_1 = 13,6 - 10,5 = 3,1$

(δ) Ὁ βαθμὸς ὁ ὁποῖος ἀντιπροσωπεύει τὴν διάμεσον εἰς τὰ Μαθηματικά εἶναι, ὡς ἔχομεν ἀναφέρει, τὸ 12, ἐνῶ ὁ ἴδιος βαθμὸς παριστᾷ τὸ Q_1 διὰ τὰ Ἑλληνικά. Δηλ. ἐνῶ εἰς τὰ Μαθηματικά τὸ 50% τῶν 80 περιπτώσεων ἐπῆραν βαθμοὺς ἄνω τοῦ 12, εἰς τὰ Ἑλληνικά ἐπῆραν βαθμοὺς ἄνω τοῦ 12 τὰ 75% τῶν περιπτώσεων.

Ἐπειδὴ τὸ αὐτὸ σύνολον ὑποψηφίων ἔλαβεν τὰς δύο ἐξετάσεις εἰς τὰ Ἑλληνικά καὶ εἰς τὰ Μαθηματικά, θὰ εἶναι δικαιολογημένη ἡ ὑπόθεσίς μας ὅτι οἱ βαθμοὶ οἱ ὁποῖοι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν διάμεσον τῶν Μαθηματικῶν ($Q_2 = 12$) καὶ τῶν Ἑλληνικῶν ($Q_2 = 13,5$) θὰ εἶναι ἰσοδύναμοι. Μὲ βάσιν τὴν ὑπόθεσιν αὐτὴν δύναται νὰ λεχθῇ ὅτι ἡ διαφορὰ εἰς τοὺς βαθμοὺς δυνατὸν νὰ ὀφείλεται εἰς τὴν δυσκολίαν τοῦ μαθήματος ἢ εἰς τὴν αὐστηρὰν βαθμολογίαν τοῦ ἐξεταστοῦ. Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ διὰ τοὺς ἄλλους βαθμοὺς.

Διὰ νὰ εἶναι εὐκολωτέρα ἡ μετατροπὴ τῶν βαθμῶν τῶν Ἑλληνικῶν εἰς τὰ Μαθηματικά καὶ ἀντιστρόφως, κατασκευάζομεν τὸ σχ. 17, εἰς τὸ ὁποῖον



Σχ. 17

παριστῶμεν ἐπὶ τοῦ ὀριζοντίου ἄξονος τοὺς βαθμοὺς τῶν Μαθηματικῶν καὶ ἐπὶ τοῦ κατακόρυφου ἄξονος τοὺς βαθμοὺς τῶν Ἑλληνικῶν. Εἰς τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν τῶν ἄξόνων τοποθετοῦμεν τὰ διατεταγμένα ζεύγη, τὰ ἀντιστοι-

χοῦντα εἰς τὰ ἑκατοστημόρια $P_1, P_{10}, P_{25}, P_{50}, P_{75}, P_{90}, P_{99}$ τῶν Μαθηματικῶν καὶ τῶν Ἑλληνικῶν.

Εἰς τὸ P_{50} ἀντιστοιχεῖ ὁ βαθμὸς 12 τῶν Μαθηματικῶν

καὶ ὁ βαθμὸς 13,5 τῶν Ἑλληνικῶν (σχ. 16).

Τὸ διατεταγμένον ζεύγος (12, 13,5) τὸ παριστῶμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων (σχ. 17). Ὅμοίως τοποθετοῦμεν καὶ τὰ ἄλλα σημεῖα. Ὅταν ἐνώσωμεν τὰ σημεῖα διὰ συνεχοῦς γραμμῆς, θὰ δοθῇ ἡ καμπύλη διὰ τῆς ὁποίας εὐκόλως μετατρέπονται οἱ βαθμοὶ τῶν Ἑλληνικῶν εἰς τοὺς ἀντιστοίχους βαθμοὺς τῶν Μαθηματικῶν καὶ ἀντιστρόφως. Ἡ καμπύλη αὕτη συνήθως ἐπεκτείνεται εἰς ἀμφότερα τὰ ἅκρα, εἰς τρόπον ὥστε νὰ καλύψῃ ὅλον τὸ μῆκος τῶν βαθμῶν.

Ἐὰν ζητηθῇ ὁ βαθμὸς τῶν Ἑλληνικῶν, ὁ ὁποῖος ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν βαθμὸν 11,5 τῶν Μαθηματικῶν, ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν ἐκ τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων κάθετον, ἡ ὁποία θὰ τμήσῃ τὴν καμπύλην εἰς τὸ σημεῖον Α. Ἐκ τοῦ Α φέρομεν ἐπίσης κάθετον εἰς τὸν ἄξονα τῶν τεταγμένων, ἡ ὁποία τὸν συναντᾷ εἰς ἓνα σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ ὁ βαθμὸς 13,1 τῶν Ἑλληνικῶν.