

5. ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΙΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ένας βαθμός έχει έννοιαν όταν ή θέσις του, έν σχέσει με τούς άλλους βαθμούς του υπό εξέτασιν συνόλου, είναι γνωστή. Δύο ομάδες βαθμών και όταν ακόμη έχουν τόν αὐτόν ἀριθμητικόν μέσον, δέν συγκρίνονται κατ' ἀνάγκην. Ἡ διαφορά εἰς τήν ἔκτασιν — διασποράν — τῶν τιμῶν τῶν παρατηρήσεων ή μετρήσεων δίδει διαφορετικὰς ἀξίας δι' ἕκαστον τῶν συνόλων.

Παρ' ὅλον ὅτι ὁ ἀριθμητικὸς μέσος εἶναι χρήσιμον στοιχεῖον διὰ τήν λήψιν πληροφοριῶν ἀπὸ μίαν κατανομήν, ὅμως δέν περιγράφει ἐπαρκῶς τήν φυσιογνωμίαν της. Πολλάκις χρειάζομεθα πληροφορίας διὰ τήν διασποράν τῆς κατανομῆς περίξ τοῦ $\bar{X}$. Εἶναι δυνατόν αἱ διάφοροι τιμαὶ νὰ εἶναι συγκεντρωμένα περίξ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου, ἐντὸς στενῆς δειγματικῆς κυμάνσεως ή εὐρείας τοιαύτης, ὡς φαίνεται κατωτέρω εἰς τὰς ομάδας Α καὶ Β.

Ὅμας Α : 20, 25, 31, 38, 41

Ὅμας Β : 6, 17, 31, 44, 57

Μολοντί αἱ δύο ομάδες έχουν τόν αὐτόν ἀριθμητικόν μέσον, $\bar{X}_A = \bar{X}_B$, αἱ τιμαὶ τῆς Α ομάδος τείνουν περίξ τοῦ $\bar{X}_A$, διασπειρόμεναι ἐντὸς τοῦ διαστήματος [20,41]. Τοῦτο δέν συμβαίνει με τὰς τιμάς τῆς Β ομάδος, τῆς ὁποίας αἱ τιμαὶ ἐκτείνονται μεταξὺ τοῦ 6 καὶ 57, ἥτοι ὑπάρχουν τιμαὶ πέραν τῶν δύο ἄκρων τῆς ομάδος Α καὶ κατὰ συνέπειαν αἱ ἀτομικαὶ διαφοραὶ εἶναι μεγαλύτεραι. Ἐπειδὴ αἱ τιμαὶ τῆς Β ομάδος διασπείρονται εἰς μεγαλύτερον διάστημα ή ἐκεῖναι τῆς Α ομάδος, λέγομεν ὅτι ή κατανομή αὐτὴ έχει μεγαλυτέραν **διασποράν**.

Αἱ ἀλγεβρικαὶ διαφοραὶ $X - \bar{X}$ διὰ τὰς ομάδας Α καὶ Β εἶναι:

διὰ τήν ομάδα Α : -11, -6, 0, +7, +10

διὰ τήν ομάδα Β : -25, -14, 0, +13, +26

τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἰς ἐκάστην περίπτωσιν ἰσοῦται με τὸ μηδέν. Τὸ ἄθροισμα τῶν παρεκτροπῶν — ἀλγεβρικῶν διαφορῶν — $\Sigma (X - \bar{X}) = 0$ εἶναι ἕνας εὐκόλος ἔλεγχος διὰ τήν ὀρθότητα τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου. Ἐὰν αἱ ἀνω-

τέρω διαφοραὶ ληφθοῦν χωρὶς τὸ πρόσσημόν των, τότε τὸ ἄθροισμὰ των ἐκφράζει τὸ σύνολον τῶν παρεκτροπῶν $|X - \bar{X}|$. Τὸ ἄθροισμα τοῦτο διαιρούμενον διὰ τοῦ συνόλου τῶν περιπτώσεων N θὰ δώσῃ τὴν **μέσῃν παρεκτροπῇν** (mean deviation). Ἡ μέση παρεκτροπή ὀρίζεται ὡς τὸ πηλίκον τοῦ ἄθροίσματος τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν διαφορῶν, διηρημένον διὰ τοῦ πλῆθους τῶν περιπτώσεων μας, δηλ.

$$5.1 \quad M.d. = \frac{\Sigma |X - \bar{X}|}{N} = \frac{\Sigma |x|}{N}$$

Ἡ μέση παρεκτροπή διὰ τὴν ομάδα Α εἶναι

$$M.d. = \frac{11 + 6 + 0 + 7 + 10}{5} = \frac{34}{5} = 6,8$$

καὶ διὰ τὴν ομάδα Β

$$M.d. = \frac{25 + 14 + 0 + 13 + 26}{5} = \frac{78}{5} = 15,6$$

Ὁ πίναξ 21 εὐκολύνει τὴν εὕρεσιν τῆς μέσης παρεκτροπῆς.

Ὁ μ ἀ ς Α				Ὁ μ ἀ ς Β			
X	$x = X - \bar{X}$	$ x $	x^2	Y	$y = Y - \bar{Y}$	$ y $	y^2
20	-11	11	121	6	-25	25	625
25	-6	6	36	17	-14	14	196
31	0	0	0	31	0	0	0
38	+7	7	49	44	+13	13	169
41	+10	10	100	57	+26	26	676
$\Sigma X = 155$ $\bar{X} = 31$	$\Sigma x = 0$	$\Sigma x = 34$	$\Sigma x^2 = 306$	$\Sigma Y = 155$ $\bar{Y} = 31$	$\Sigma y = 0$	$\Sigma y = 78$	$\Sigma y^2 = 1666$

Πίναξ 21

Ἡ χρῆσις τῶν ἀπολύτων τιμῶν εἰς τὴν στατιστικὴν συνήθως ἀποφεύγεται. Ὡς ἐκ τούτου εἶναι περιορισμένης ἀξίας ἡ μέση παρεκτροπή, διότι κατὰ τὴν εὕρεσιν της λαμβάνονται αἱ ἀπόλυτοι τιμαὶ τῶν ἀλγεβρικῶν διαφορῶν.

ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΣΠΟΡΑ

Σπουδαιότερα και πλέον χρήσιμος τῆς μέσης παρεκτροπῆς εἶναι ἡ δειγματική διασπορά. Ἐὰν ἐκάστη τῶν ἀλγεβρικών διαφορῶν τῶν ομάδων Α καὶ Β ὑψωθῇ εἰς τὸ τετράγωνον καὶ τὸ ἄθροισμά των διαιρεθῇ διὰ τοῦ συνόλου τῶν περιπτώσεων -1 , ἤτοι διὰ $N-1$, τότε τὸ πηλίκον καλεῖται **δειγματική διασπορά** (variance).

Πολλὰ βιβλία ὀρίζουν τὴν δειγματικὴν διασποράν ὡς τὸ πηλίκον τοῦ $\Sigma (X - \bar{X})^2$ διὰ τοῦ πλήθους N τῶν στατιστικῶν στοιχείων, ἀντὶ διὰ $N-1$. Ἡ διαφορά τῶν δύο πηλίκων ἔγκειται εἰς τὸ γεγονός ὅτι, ὅταν διαιρῶμεν διὰ $N-1$, λαμβάνομεν μίαν ἀμερόληπτον ἐκτίμησιν τῆς διασπορᾶς τοῦ πληθυσμοῦ καὶ δὲν παρουσιάζει συστηματικὴν τάσιν νὰ εἶναι μικρότερα τῆς διασπορᾶς τοῦ πληθυσμοῦ. Διαιροῦντες διὰ N , τὸ ἐξαγόμενον θὰ εἶναι μεροληπτικὴ ἐκτίμησις τῆς διασπορᾶς τοῦ πληθυσμοῦ.

Μολονότι τὸ N εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν μετρήσεων ἡ παρατηρήσεών μας, ἡ ποσότης $N-1$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν διαφορῶν $X - \bar{X}$, ὁ ὁποῖος ἐλευθέρως ποικίλλει. Διὰ τὴν καλυτέραν κατανόησιν τούτου, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν τὰς μετρήσεις 15, 14, 19, τῶν ὁποίων ὁ $\bar{X} = 16$ καὶ αἱ διαφοραὶ ἀπὸ τὸ $\bar{X}$ εἶναι $-1, -2, +3$. Τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι $(-1) + (-2) + (+3) = 0$. Ἐπειδὴ τοῦτο συμβαίνει πάντοτε, ἐὰν δύο ἐκ τῶν τριῶν ἀριθμῶν εἶναι γνωστοί, ὁ τρίτος θὰ εἶναι ὠρισμένος. Δὲν μπορεῖ νὰ ποικίλλῃ. Προσθέτοντες τὰ τετράγωνα τῶν εὐρεθεισῶν παρεκτροπῶν $1 + 4 + 9 = 14$, γίνεται κατανοητὸν ὅτι μόνον δύο ἐκ τῶν παρεκτροπῶν δύνανται νὰ κυμανθοῦν ἐλευθέρως καὶ ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς $N-1$ καλεῖται **βαθμὸς ἐλευθερίας** (degree of freedom).

Ἐκ τοῦ πίνακος 21, 4η στήλη, λαμβάνομεν

$$5.2 \quad V_A = s_A^2 = \frac{\Sigma (X - \bar{X})^2}{N-1} = \frac{\Sigma x^2}{N-1} = \frac{306}{4} = 76,5$$

καὶ ἐκ τῆς 8ης στήλης τοῦ ἰδίου πίνακος ἔχομεν

$$V_B = s_B^2 = \frac{\Sigma y^2}{N-1} = \frac{1666}{4} = 416,5$$

Ὅταν ὁ ἀριθμητικὸς μέσος εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς, ὁ ὑπολογισμὸς τῆς δειγματικῆς διασπορᾶς εἶναι εὐκόλος. Ἡ δυσκολία εἶναι προφανὴς ὅταν ὁ μέσος ὅρος εἶναι δεκαδικὸς ἀριθμὸς, ὡς φαίνεται εἰς τὸν πίνακα 22.

X	$X - \bar{X} = x$	x^2
8	1,6	2,56
7	0,6	0,36
6	-0,4	0,16
6	-0,4	0,16
5	-1,4	1,96
$\Sigma X = 32$ $\bar{X} = 6,4$	$\Sigma x = 0$	$\Sigma x^2 = 5,20$

Πίναξ 22

Ἐξ αὐτοῦ ἔχομεν

$$V = s^2 = \frac{\Sigma x^2}{N-1} = \frac{5,20}{4} = 1,3$$

Ὁ ὑπολογισμὸς τῆς δειγματικῆς διασπορᾶς εὐκολύνεται, ὅταν εἰς τὴν θέσιν τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου $\bar{X}$ θέσωμεν τὸν ὑποθετικὸν μέσον $\bar{X}_v$. Ἀντὶ τοῦ $\bar{X} = 6,4$ λαμβάνομεν $\bar{X}_v = 6$. Ἡ ἐκλογὴ τοῦ $\bar{X}_v$ εἶναι αὐθαίρετος. Συνιστᾶται ὁ πλησιέστερος ἀκέραιος τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου. Μὲ

X	$X - \bar{X}_v = x$	x^2
8	$8 - 6 = 2$	4
7	$7 - 6 = 1$	1
6	$6 - 6 = 0$	0
6	$6 - 6 = 0$	0
5	$5 - 6 = -1$	1
	$\Sigma x = 2$	$\Sigma x^2 = 6$

Πίναξ 23

βάσιν τὰ στοιχεῖα τοῦ πίνακος 23 καὶ δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου

$$5.3 \quad V = s^2 = \frac{\Sigma x^2 - \frac{(\Sigma x)^2}{N}}{N-1} \quad \text{λαμβάνομεν}$$

$$V = \frac{6 - \frac{(2)^2}{5}}{4} = \frac{6 - \frac{4}{5}}{4} = 1,3$$

ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΙΣ

Ἡ δειγματική διασπορά εἰς τὴν στατιστικὴν ἐκφράζεται εἰς τετραγωνικὰς μονάδας. Διὰ πολλοὺς λόγους ἐνδείκνυται ἡ χρησιμοποίησις ὄχι τετραγωνικῶν μονάδων, ἀλλὰ μονάδων ὡς ἐκείνων τῶν ἀρχικῶν μετρήσεων. Ἡ μετατροπὴ ἐπιτυγχάνεται διὰ τῆς εὐρέσεως τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τῆς δειγματικῆς διασπορᾶς καὶ καλεῖται **δειγματικὴ τυπικὴ ἀπόκλισις** (standard deviation). Αἱ μονάδες τῆς τυπικῆς ἀποκλίσεως εἶναι αἱ αὐταὶ ὡς καὶ τῶν ἀρχικῶν στατιστικῶν στοιχείων καὶ δύνανται νὰ παρασταθοῦν γραφικῶς εἰς ὀριζόντιον ἄξονα. Ἡ τυπικὴ ἀπόκλισις εἶναι ἓνα μέτρον τὸ ὁποῖον μᾶς πληροφορεῖ πόσον αἱ τιμαὶ ὡς σύνολον ἀπέχουν τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου, δηλ. πόσον διασπείρονται, καὶ ὄχι τὴν ἀπόστασιν ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ τῆς μεγαλυτέρας καὶ μικροτέρας τιμῆς.

Ἡ τυπικὴ ἀπόκλισις τοῦ πληθυσμοῦ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$5.4 \quad \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N} - \left(\frac{\Sigma x}{N}\right)^2}$$

ἢ τοῦ ἰσοδυνάμου του

$$5.5 \quad \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x^2 - \frac{(\Sigma x)^2}{N}}{N}}$$

Ἡ τυπικὴ ἀπόκλισις διὰ N στατιστικὰ δεδομένα ἐνὸς δείγματος ὀρίζεται ὡς ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ πηλίκου τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ἀλγεβρικῶν διαφορῶν διὰ τοῦ $N-1$, ἥτοι

$$5.6 \quad s = \sqrt{\frac{\Sigma (X - \bar{X})^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{N}}{N-1}}$$

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον τὸ τελικὸν ἀποτέλεσμα ἀντιπροσωπεύει μίαν ἀμερόληπτον ἐκτίμησιν τῆς τυπικῆς ἀποκλίσεως τοῦ πληθυσμοῦ ἀπὸ τὸν ὁποῖον προῆλθε τὸ δείγμα. Εἶναι προφανές ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν δύο τύπων, τῆς τυπικῆς ἀποκλίσεως πληθυσμοῦ καὶ δείγματος, λαμβάνει διαστάσεις μόνον, ὅταν τὸ πλῆθος τῶν δεδομένων τοῦ δείγματος εἶναι μικρόν. Ἐὰν τὸ N εἶναι μέγας ἀριθμὸς ($N > 50$), ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν δύο τύπων εἶναι μικρά, σχεδὸν ἀμελητέα.

Εἶναι ἀναγκαῖον νὰ διακρίνωμεν τὴν τυπικὴν ἀπόκλισιν τοῦ πληθυσμοῦ ἀπὸ τοῦ δείγματος. Συνήθως τὸ γράμμα s ἀντιπροσωπεύει τὴν τυπικὴν ἀπόκλισιν τοῦ δείγματος καὶ τὸ σ τὴν τυπικὴν ἀπόκλισιν τοῦ πληθυσμοῦ.

Υποθέτομεν ότι 10 μαθηταὶ ἔλαβον εἰς γραπτὴν ἐξέτασιν τοὺς βαθμοὺς οἱ ὅποιοι ἐμφαίνονται εἰς τὴν στήλην 2 τοῦ πίνακος 24. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ τυπικὴ ἀπόκλισις s . Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου 5.6

Μαθηταὶ	X	X^2
1	20	400
2	19	361
3	18	324
4	16	256
5	15	225
6	13	169
7	12	144
8	11	121
9	10	100
10	8	64
$N = 10$	$\Sigma X = 142$	$\Sigma X^2 = 2164$

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{N}}{N - 1}} \quad \text{ἔχομεν}$$

$$s = \sqrt{\frac{2164 - \frac{142^2}{10}}{9}}$$

$$s = \sqrt{\frac{2164 - 2016,4}{9}}$$

$$s = 4,05$$

Πίναξ 24

Εἰς περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἔχομεν ὁμαδοποιημένα στατιστικὰ στοιχεῖα (πίν. 25), γίνεται ἐφαρμογὴ τοῦ κάτωθι τύπου

$$5.7 \quad s = \sqrt{\frac{\Sigma fX^2 - \frac{(\Sigma fX)^2}{N}}{N - 1}}$$

Ἡ πρώτη στήλη περιλαμβάνει τοὺς βαθμοὺς οἱ ὅποιοι ἐδόθησαν εἰς τοὺς 40 μαθητάς. Ἡ δευτέρα στήλη περιλαμβάνει τὸν ἀριθμὸν τῶν μαθητῶν οἱ ὅποιοι ἔλαβον τοὺς ἀντιστοίχους βαθμοὺς. Ἡ τρίτη στήλη προέκυψεν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τῆς πρώτης καὶ δευτέρας στήλης.

$$f_1X_1 = 2 \cdot 20 = 40$$

$$f_2X_2 = 3 \cdot 18 = 54$$

$$f_3X_3 = 6 \cdot 17 = 102 \quad \text{κ.λ.π.}$$

Τέλος, ἡ τετάρτη στήλη προκύπτει ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τῆς πρώτης καὶ τρίτης στήλης.

$$f_1 X_1 \cdot X_1 = f_1 X_1^2 = 40.20 = 800$$

$$f_2 X_2 \cdot X_2 = f_2 X_2^2 = 54.18 = 972$$

$$f_3 X_3 \cdot X_3 = f_3 X_3^2 = 102.17 = 1734 \text{ κ.ο.κ.}$$

X	f	fX	fX^2
20	2	40	800
18	3	54	972
17	6	102	1734
16	6	96	1536
14	7	98	1372
13	5	65	845
12	4	48	576
11	4	44	484
9	2	18	162
8	1	8	64
	$N = 40$	$\Sigma fX = 573$	$\Sigma fX^2 = 8545$

Πίναξ 25

Δι' εφαρμογής του τύπου 5.7

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma fX^2 - \frac{(\Sigma fX)^2}{N}}{N - 1}} \quad \text{λαμβάνομεν}$$

$$s = \sqrt{\frac{8545 - \frac{573^2}{40}}{39}}$$

$$s = \sqrt{\frac{8545 - 8208,225}{39}}$$

$$s = \sqrt{\frac{336,775}{39}} = 2,939$$

ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΥΠΙΚΗΣ ΑΠΟΚΛΙΣΕΩΣ ΔΙΑ ΤΗΣ ΧΡΗΣΕΩΣ $\bar{X}_v$

Ὁ ὑπολογισμὸς τῆς τυπικῆς ἀποκλίσεως μὲ τοὺς περιγραφέντας τρόπους μᾶς ἐμπλέκει εἰς πράξεις μὲ πολυψηφίους ἀριθμούς. Πρὸς ἀποφυγὴν τῶν μεγάλων ἀριθμῶν συνιστᾶται ἡ μέθοδος ἡ ὁποία χρησιμοποιεῖ τὸν ὑποθετικὸν μέσον. Ὁ πίναξ 26 παρουσιάζει καὶ τὰς δύο μεθόδους ὑπολογισμοῦ τῆς τυπικῆς ἀποκλίσεως πρὸς σύγκρισιν. Πρέπει νὰ τονισθῇ ὅτι αἱ μέθοδοι εὐρέσεως τῆς τυπικῆς ἀποκλίσεως διὰ ὁμαδοποιημένα στοιχεῖα, ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὴν μέσῃν τιμὴν ὄλων τῶν διαστημάτων τάξεων.

Ἡ πρώτη στήλη περιέχει τὰ διαστήματα τάξεων καὶ ἡ δευτέρα τὰ μέσα αὐτῶν. Ἡ τρίτη καὶ ἡ ἑκτη στήλη εἶναι ἡ αὐτή, παριστᾷ δὲ τὴν συχνότητα. Ἡ τετάρτη στήλη προέκυψεν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τῆς δευτέρας καὶ τρίτης στήλης καὶ ἡ πέμπτη περιλαμβάνει τὰ γινόμενα τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τῆς δευτέρας καὶ τετάρτης στήλης. Θεωροῦντες ὡς $\bar{X}_v = 10$, αἱ διαφοραὶ $X - \bar{X}_v$ μᾶς δίδουν τὴν 7ην στήλην. Ἡ ὀγδόη καὶ ἡ ἐνάτη στήλη προέκυψαν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τῶν στηλῶν f καὶ x καθὼς καὶ τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τῶν x καὶ fx ἀντιστοίχως.

	Μέσα X	f	fX	fX^2	f	$X - \bar{X}_v = x$	fx	fx^2
0-2	1	2	2	2	2	-9	-18	162
3-5	4	3	12	48	3	-6	-18	108
6-8	7	5	35	245	5	-3	-15	45
9-11	10	8	80	800	8	0	0	0
12-14	13	6	78	1014	6	+3	+18	54
15-17	16	4	64	1024	4	+6	+24	144
18-20	19	2	38	722	2	+9	+18	162
		Σf 30	ΣfX 309	ΣfX^2 3855	Σf 30		Σfx 9	Σfx^2 675

Πίναξ 26

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma fX^2 - \frac{(\Sigma fX)^2}{N}}{N-1}}$$

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma fx^2 - \frac{(\Sigma fx)^2}{N}}{N-1}}$$

$$s = \sqrt{\frac{3855 - \frac{(309)^2}{30}}{29}}$$

$$s = \sqrt{\frac{675 - \frac{9^2}{30}}{29}}$$

$$s = \sqrt{\frac{3855 - 3182,7}{29}}$$

$$s = \sqrt{\frac{675 - 2,7}{29}}$$

$$s = \sqrt{\frac{672,3}{29}} = 4,815$$

$$s = \sqrt{\frac{672,3}{29}} = 4,815$$

ΔΙΟΡΘΩΣΙΣ SHEPPARD

Κατά τὸν ὑπολογισμόν τῆς τυπικῆς ἀποκλίσεως ὅλαι αἱ παρατηρήσεις, εἰς οἷονδήποτε διάστημα καὶ ἂν εὑρίσκωνται, ἐθεωρήθησαν ὡς ἔχουσαι τιμὴν τὸ μέσον τοῦ διαστήματος. Ὅταν μία κατανομὴ τείνη εἰς τὸ μηδὲν καὶ ἀπὸ τὰς δύο κατευθύνσεις, εἶναι προφανὲς ὅτι αἱ διάφοροι τιμαὶ ἐντὸς τοῦ διαστήματος δὲν ἔχουν ὡς μέσσην τιμὴν τὸ μέσον τοῦ διαστήματος. Εἰς ἄλλας περιπτώσεις θὰ εἶναι ὀλίγον μικρότερα καὶ εἰς ἄλλας ὀλίγον μεγαλύτερα. Τοιοῦτοτρόπως ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου ἀπὸ ὁμαδοποιημένα στοιχεῖα θὰ διαφέρῃ ὀλίγον τι ἐκείνου τῶν μὴ ὁμαδοποιημένων στοιχείων. Ἡ διαφορὰ αὕτη θὰ ἐπηρεάσῃ καὶ τὴν τυπικὴν ἀπόκλινιν

$$s = \sqrt{\frac{\sum f(X - \bar{X})^2}{N - 1}}$$

διότι αὕτη περιλαμβάνει τὰς διαφορὰς $X - \bar{X}$.

Αἱ μικραὶ διαφοραὶ τῆς ὁμαδοποιήσεως εἰς ἀμφοτέρω τὰ ἄκρα δὲν τείνουν νὰ ἀλληλοδιορθωθοῦν. Προστίθενται τελικὰ καὶ ἐπαυξάνουν τὸ λάθος εἰς τὴν τυπικὴν ἀπόκλινιν. Ἐπομένως, ἡ τυπικὴ ἀπόκλινις ὅταν ὑπολογίζεται ἀπὸ ὁμαδοποιημένα δεδομένα, τείνει νὰ εἶναι μεγαλύτερα τῆς τυπικῆς ἀποκλίσεως ἢ ὅποια ὑπολογίζεται ἀπὸ τὰ ἀρχικὰ μὴ ὁμαδοποιημένα δεδομένα.

Ὅταν τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων εἶναι μεγάλο ἢ τὸ διάστημα τάξεως εἶναι μικρόν, ἡ διορθωμένη τυπικὴ ἀπόκλινις θὰ διαφέρῃ ὀλίγον τῆς ἀρχικῶς ὑπολογισθείσης. Ἡ διαφορὰ γίνεται σημαντικὴ διὰ μεγάλα διαστήματα καὶ μικροῦ πλῆθους στοιχείων.

Μία διόρθωσις, γνωστὴ ὡς **διόρθωσις Sheppard**, πρέπει νὰ ἐφαρμόζεται, ὅταν τὰ δεδομένα εἶναι ὁμαδοποιημένα.

Ἡ διόρθωσις Sheppard εἶναι δυνατὸν νὰ ἐφαρμοσθῇ μόνον διὰ συνεχεῖς μεταβλητὰς αἱ ὅποια νὰ εἶναι περίπου κανονικαί.

Ἡ διόρθωσις πρέπει νὰ γίνεται εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις, ὅπου ἕνας ἀκριβὴς ὑπολογισμὸς τῆς τυπικῆς ἀποκλίσεως εἶναι ἀπαραίτητος.

Ὁ τύπος ὁ δίδων τὴν διορθωμένην τυπικὴν ἀπόκλινιν εἶναι

$$5.8 \quad s_d = \sqrt{s^2 - \frac{h^2}{12}}$$

ἐνθα s ἡ τυπικὴ ἀπόκλισις
καὶ h τὸ εὖρος ἐκάστου διαστήματος.

Ἡ διόρθωσις τοῦ Sheppard εἶναι τὸ πηλὺκον $\frac{h^2}{12}$ τὸ ὁποῖον ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὸ s^2 .

Τὰ κάτωθι παραδείγματα μᾶς παρουσιάζουν τὸ μέγεθος διορθώσεως δύο ἴσων τυπικῶν ἀποκλίσεων μὲ διαφορετικὰ διαστήματα τάξεων.

Ὑποθέτομεν ὅτι μία ὁμάς Α ἔχει $s = 20$ καὶ $h = 5$ καὶ μία ἄλλη ὁμάς Β ἔχει $s = 20$ καὶ $h = 30$. Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου 5.8

$$s_{\delta} = \sqrt{s^2 - \frac{h^2}{12}} \quad \text{ἔχομεν}$$

$$s_{\delta_A} = \sqrt{400 - \frac{25}{12}} \quad \text{καὶ} \quad s_{\delta_B} = \sqrt{400 - \frac{900}{12}}$$

$$s_{\delta_A} = 19,95$$

$$s_{\delta_B} = 18,03$$

ΣΠΟΥΔΑΙΟΤΗΣ ΤΗΣ ΤΥΠΙΚΗΣ ΑΠΟΚΛΙΣΕΩΣ

Ὑποθέτομεν ὅτι 40 μαθηταὶ ἐνὸς τμήματος εἰς γραπτὴν ἐξέτασιν εἰς τὰ Μαθηματικὰ ἔλαβον βαθμοὺς κυμαινομένους μεταξὺ 2 καὶ 19, μὲ ἀριθμητικὸν μέσον 12, καὶ εἰς ἐτέραν ἐξέτασιν εἰς τὰ Ἑλληνικὰ τὰ ὅρια τῶν βαθμῶν ἦσαν 6 καὶ 16, μὲ ἀριθμητικὸν μέσον 11. Ὑποθέτομεν ἐπὶ πλέον ὅτι ἡ τυπικὴ ἀπόκλισις εἰς τὰ Μαθηματικὰ εἶναι $s_{\mu} = 3,5$ καὶ ἡ τυπικὴ ἀπόκλισις εἰς τὰ Ἑλληνικὰ εἶναι $s_{\epsilon} = 2$.

Ἐὰν ἓνας μαθητὴς Α, μὲ τὴν μεγίστην βαθμολογίαν εἰς τὰ Μαθηματικὰ, πάρῃ εἰς τὰ Ἑλληνικὰ ὡς βαθμὸν τὸν ἀριθμητικὸν μέσον, θὰ ἔχῃ σύνολον μονάδων 30. Ἐὰν ὅμως ἕτερος μαθητὴς Β, μὲ βαθμὸν εἰς τὰ Μαθηματικὰ τὸν ἀριθμητικὸν μέσον, πάρῃ τὸν μέγιστον βαθμὸν εἰς τὰ Ἑλληνικὰ, θὰ ἔχῃ σύνολον μονάδων 28 (πίν 27).

	Μαθηματικὰ	Ἑλληνικὰ	Σύνολον
Μαθητὴς Α	19	11	30
Μαθητὴς Β	12	16	28
Μαθητὴς Γ	18	11	29

Πίναξ 27

Ἐξ αὐτῆς τῆς συγκρίσεως βλέπομεν ὅτι ὁ Β μαθητὴς εὐρίσκεται εἰς μειονεκτικωτέραν θέσιν. Ἐκτὸς αὐτοῦ, ἐὰν ἄλλος μαθητὴς Γ ἔλαβε 18 εἰς τὰ Μαθηματικά καὶ τὸν μέσον ὄρον εἰς τὰ Ἑλληνικά, θὰ ἔχη σύνολον μονάδων μεγαλύτερον ἀπὸ τὸν μαθητὴν Β, ὁ ὁποῖος ἔλαβε τὸν μέγιστον βαθμὸν εἰς τὰ Ἑλληνικά.

Ἡ διαφορὰ αὕτη δὲν ἔγκειται εἰς τὴν διαφορὰν τῶν ἀριθμητικῶν μέσων, διότι προσθέτοντες 1 μονάδα εἰς ὅλους τοὺς βαθμοὺς τῶν γραπτῶν εἰς τὰ Ἑλληνικά, θὰ ὑπάρξῃ ἐξίσωσις τῶν μέσων ὄρων. Τοῦτο ὅμως δὲν διορθώνει τὴν κατάστασιν τοῦ μαθητοῦ Β ἐν σχέσει πρὸς τὸν Α καὶ Γ. Ἡ αἰτία αὐτῆς τῆς διαφορᾶς εἶναι ἡ μεγάλη **διασκόρπισις** (dispersion) τῶν βαθμῶν εἰς τὰ Μαθηματικά. Ἐὰν ὅμως τὰ Μαθηματικά καὶ τὰ Ἑλληνικά θεωροῦνται ἕξ ἴσου σπουδαῖα καὶ οἱ δοθέντες βαθμοὶ θὰ χρησιμοποιηθοῦν διὰ τὴν ἀπόλυτον ἀξιολόγησιν δύο μαθητῶν, αἱ δύο κλίμακες βαθμολογίας δὲν πρέπει νὰ διαφέρουν εἰς τὴν διασποράν. Ἡ σπουδαιότης τῶν διαφορῶν δὲν ἔγκειται εἰς τὰς δειγματικὰς κυμάνσεις, ἀλλὰ εἰς τὴν διαφορὰν τῶν τυπικῶν ἀποκλίσεων.

ΤΥΠΙΚΟΝ ΠΟΣΟΝ

Θεωροῦμεν ὅτι ἓνας μαθητὴς Δ ἐκ τῶν προαναφερθέντων ἔλαβε 18 εἰς τὰ Μαθηματικά, ἐνῶ ἓνας Ε μαθητὴς ἐβαθμολογήθη μὲ 15 εἰς τὰ Ἑλληνικά. Ποῖος ἐκ τῶν δύο ἔχει καλυτέραν ἐπίδοσιν; Ἀσφαλῶς δὲν θὰ εἶναι φρόνιμον νὰ λεχθῇ ὅτι ὁ Δ εἶναι καλύτερος, διότι $18 > 15$. Πρὸς σύγκρισιν τούτων εὐρίσκομεν τὰς παρεκτροπὰς αὐτῶν ἀπὸ τοὺς ἀντιστοίχους ἀριθμητικούς μέσους, αἱ ὁποῖαι εἶναι 6 καὶ 4 διὰ τὸν Δ καὶ Ε μαθητὴν.

	Βαθμοὶ	Παρεκτροπαὶ
Μαθητὴς Δ	Μαθηματικά 18	$18 - 12 = 6$
Μαθητὴς Ε	Ἑλληνικά 15	$15 - 11 = 4$

Πίναξ 28

Ἀλλὰ καὶ ἐδῶ δὲν δυνάμεθα νὰ ἀποφασίσωμεν ποῖος βαθμὸς κατ' ἀπόλυτον σύγκρισιν εἶναι ὑψηλότερος. Οἱ λόγοι τῶν παρεκτροπῶν διὰ τῶν ἀντιστοίχων τυπικῶν ἀποκλίσεων μᾶς δίδουν ἀπόλυτον μέτρον συγκρίσεως τῶν δύο βαθμῶν, ἤτοι,

$$\text{διὰ τὸν μαθητὴν Δ} = \frac{X - \bar{X}}{s_x} = \frac{18 - 12}{3,5} = 1,71 \quad \text{καὶ}$$

$$\text{διὰ τὸν μαθητὴν Ε} = \frac{Y - \bar{Y}}{s_y} = \frac{15 - 11}{2} = 2$$

Ἐκ τούτων συνάγεται ὅτι ὁ μαθητὴς Ε ἔχει καλυτέραν ἐπίδοσιν τοῦ Δ, μολονότι ὁ Ε ἐβαθμολογήθη μὲ 15 < 18.

Ὁ λόγος $\frac{X - \bar{X}}{s} = z$ καλεῖται **τυπικὸν ποσὸν** (standard score) καὶ μᾶς βοηθεῖ

- (α) εἴτε εἰς τὴν μετατροπὴν στατιστικῶν δεδομένων εἰς ἄλλα ἰσοδύναμα εἰς νέαν κλίμακα
- (β) εἴτε εἰς τὴν σύγκρισιν τῶν βαθμῶν τοῦ αὐτοῦ τμήματος δύο διαφορετικῶν μαθημάτων ἢ
- (γ) τοῦ αὐτοῦ μαθήματος δύο διαφορετικῶν τμημάτων. Νοεῖται ὅτι οἱ διδάσκοντες εἶναι διαφορετικὰ πρόσωπα.

Α

Ὑποθέτομεν ὅτι ἔχομεν τοὺς πίνακας 29 καὶ 30, οἱ ὅποιοι ἀντιπροσωπεύουν τοὺς βαθμοὺς 10 μαθητῶν εἰς τὰς τελικὰς ἐξετάσεις τῶν Μαθηματικῶν καὶ τῆς Φυσικῆς.

Βαθμοὶ X	$X - \bar{X}$	$(X - \bar{X})^2$
20	7	49
19	6	36
17	4	16
16	3	9
15	2	4
13	0	0
11	-2	4
9	-4	16
7	-6	36
3	-10	100
$\Sigma X = 130$ $\bar{X} = 13$	0 $\Sigma(X - \bar{X})$	270 $\Sigma(X - \bar{X})^2$

Πίναξ 29

Βαθμοὶ Y	$y = Y - \bar{Y}$	$y^2 = (Y - \bar{Y})^2$
17	4	16
16	3	9
15	2	4
14	1	1
13	0	0
12	-1	1
11	-2	4
10	-3	9
9	-4	16
8	-5	25
$\Sigma Y = 125$ $\bar{Y} = 12,5$	$\Sigma y = -5$	$\Sigma y^2 = 85$

Πίναξ 30

Ἐκ τοῦ πίνακος 29 λαμβάνομεν $s_x = 5,48$ καὶ $\bar{X} = 13$ καὶ ἐκ τοῦ 30 $s_y = 3,03$ καὶ $\bar{Y} = 12,5$. Ζητεῖται νὰ εὕρεθῇ μὲ ποῖον βαθμὸν τῶν Φυσικῶν ἀντιστοιχεῖ ὁ βαθμὸς 16 τῶν Μαθηματικῶν. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ μία ἀπλῆ

ἀντικατάστασις εἰς τὸν τύπον

$$5.9 \quad \frac{X - \bar{X}}{s_x} = \frac{Y - \bar{Y}}{s_y} = z \quad \text{ὅπου δίδονται τὰ στοιχεῖα}$$

$$X = 16$$

$$\bar{X} = 13$$

$$s_x = 5,48$$

$$\bar{Y} = 12,5$$

$$s_y = 3,03 \quad \text{καὶ ζητεῖται τὸ } Y.$$

Δι' ἀντικαταστάσεως τῶν στοιχείων αὐτῶν εὐρίσκομεν $Y = 14,16$. Ἡ τιμὴ αὕτη ἐκφράζει τὸν βαθμὸν τῶν Φυσικῶν, ὁ ὁποῖος εἶναι ἰσοδύναμος μετὰ τὸν βαθμὸν 16 τῶν Μαθηματικῶν. Τοῦτο σημαίνει ὅτι οἱ δύο μαθητές, μολονότι ἔχουν διαφορετικοὺς βαθμοὺς, ἔχουν τὴν αὐτὴν ἐπίδοσιν.

Ὡς φαίνεται ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω, παρουσιάζεται κάποια δυσκολία εἰς τὴν σύγκρισιν τῶν διαφόρων βαθμῶν, ἰδιαιτέρως ὅταν τὰ $\bar{X}$, $\bar{Y}$, s_x , s_y δὲν εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί. Πρὸς τοῦτο μετατρέπομεν κεχωρισμένως τοὺς βαθμοὺς μας εἰς νέαν κλίμακα μετὰ ὑποθετικὸν μέσον 100 καὶ ὑποθετικὴν τυπικὴν ἀπόκλισιν 20. Θεωρεῖται ὅτι πάντοτε οἱ βαθμοὶ κατανέμονται κανονικῶς πέριξ τοῦ $\bar{X}$ καὶ $\bar{Y}$.

Διὰ τὸν βαθμὸν 16 τῶν Μαθηματικῶν λαμβάνομεν ἐκ τοῦ τύπου

$$\frac{X - \bar{X}}{s_x} = \frac{Y - \bar{Y}}{s_y}$$

$$\frac{16 - 13}{5,48} = \frac{Y - 100}{20}$$

$$\frac{3}{5,48} = \frac{Y - 100}{20}$$

$$\frac{3 \cdot 20}{5,48} = Y - 100$$

$$\frac{60}{5,48} + 100 = Y \Rightarrow Y = 110,95$$

Διὰ τὸν βαθμὸν 14,16 τῶν Φυσικῶν, ὁ ὁποῖος εἶναι ἰσοδύναμος τοῦ 16, ἐπίσης λαμβάνομεν $Y = 110,95$

$$\frac{14,16 - 12,5}{3,03} = \frac{Y - 100}{20}$$

τὸ ὁποῖον ἀνεμένετο. Ἡ ἰδία ἐργασία γίνεται καὶ διὰ τοὺς ἄλλους βαθμοὺς.

Με τὸν ἴδιον τρόπον εὐρίσκομεν ὅτι ὁ βαθμὸς 16 τῶν Φυσικῶν εἰς τὴν νέαν κλίμακα ἀντιστοιχεῖ μετὰ τὸν βαθμὸν $Y \simeq 123$. Συνεπῶς $16\phi > 16\mu$.

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον $\frac{X - \bar{X}}{s_x} = z$, εὐρίσκομεν τὸ τυπικὸν ποσὸν

$$z = 0,55 = \frac{16 - 13}{5,48}. \quad \text{Τὸ τυπικὸν ποσὸν } z = 0,55 \text{ μάς λέγει ὅτι ὁ βαθμὸς}$$

16 εἰς τὰ Μαθηματικὰ εἶναι κατὰ 0,55 τυπικὰς ἀποκλίσεις μεγαλύτερος τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου, καθὼς ἐπίσης καὶ τὸ 14,16 τῶν Φυσικῶν εἶναι κατὰ 0,55 τυπικὰς ἀποκλίσεις μεγαλύτερος τοῦ ἀντιστοίχου ἀριθμητικοῦ μέσου.

Ὁ βαθμὸς 16 εἰς τὰ Φυσικὰ εἶναι κατὰ 1,2 τυπικὰς ἀποκλίσεις μεγαλύτερος τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου $\left(z = \frac{16 - 12,5}{3,03} = 1,2 \right)$. Εἶναι προφανές ὅτι οἱ δύο μαθηταὶ μετὰ τὸν αὐτὸν βαθμὸν εἰς τὰ Μαθηματικὰ καὶ Φυσικὰ ἔχουν εἰς τὴν πραγματικότητα μεγάλην διαφορὰν εἰς τὴν ἐπίδοσίν των.

B

ὑποθέτομεν ὅτι εἰς μίαν ἐξέτασιν ἐπτὰ μαθηταὶ ἔλαβον τοὺς βαθμοὺς οἱ ὅποιοι ἐμφαίνονται εἰς τὸν πίνακα 31, στήλη 1.

X	$x = X - \bar{X}$	$x^2 = (X - \bar{X})^2$	$z = \frac{X - \bar{X}}{\sigma}$	z^2
9	+ 3	9	1,5	2,25
8	+ 2	4	1,0	1,00
7	+ 1	1	0,5	0,25
6	0	0	0,0	0,00
5	- 1	1	- 0,5	0,25
4	- 2	4	- 1,0	1,00
3	- 3	9	- 1,5	2,25
$\Sigma X = 42$ $\bar{X} = 6$	$\Sigma x = 0$	$\Sigma x^2 = 28$	$\Sigma z = 0$	$\Sigma z^2 = 7$

Πίναξ 31

Ἡ τετάρτη στήλη περιλαμβάνει τὸ τυπικὸν ποσὸν z , τὸ δὲ Σz πάντοτε ἰσοῦται μετὰ τὸ μηδέν. Τοῦτο κατ' ἀνάγκην συμβαίνει, ἐπεὶ τὸ Σz εἶναι εἰς τὴν πραγματικότητα τὸ ἄθροισμα τῶν παρεκτροπῶν $X - \bar{X}$ διαιρούμενον διὰ τῆς τυπικῆς ἀποκλίσεως. Ἐθεωρήσαμεν ὡς τυπικὴν ἀπόκλινιν, εἰς τὴν 4ην στήλην, τὴν τοῦ πληθυσμοῦ, δηλ.

$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(X - \bar{X})^2}{N}}$, μόνον δι' ευκολίαν τῶν πράξεων. Δι' οἰονδήποτε

δείγμα συνιστᾶται πάντοτε ἡ χρῆσις τοῦ τύπου $s = \sqrt{\frac{\Sigma(X - \bar{X})^2}{N - 1}}$.

Ἄλλο σημεῖον τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ προσεχθῇ εἶναι ὅτι τὸ Σz^2 ἰσοῦται πάντοτε μὲ N , ἐὰν ἔγινεν χρῆσις τοῦ τύπου τῆς τυπικῆς ἀποκλίσεως τοῦ πληθυσμοῦ ἢ μὲ $N - 1$, ἐὰν ἐχρησιμοποιήθῃ ὁ τύπος τῆς δειγματικῆς τυπικῆς ἀποκλίσεως.*

Ἐπειδὴ ἰσχύει $\Sigma z^2 = N$, ἔπεται $\frac{\Sigma z^2}{N} = 1$, δηλ. ἡ τυπικὴ ἀπόκλισις τῶν τιμῶν z τοῦ τυπικοῦ ποσοῦ ἰσοῦται πάντοτε μὲ τὴν μονάδα.**

* Ἐπειδὴ $z = \frac{X - \bar{X}}{\sigma}$ (4η στήλη, πίν. 31) συνεπάγεται

$$\sum_{i=1}^N z_i^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}{\frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}{N}} = N$$

Ἐκ δὲ τοῦ τύπου

$$z = \frac{X - \bar{X}}{s} \quad \text{εὐρίσκομεν} \quad \sum_{i=1}^N z_i^2 = N - 1$$

** Τὸ ὅτι ἡ τυπικὴ ἀπόκλισις τοῦ τυπικοῦ ποσοῦ $Z = 1$ ἐλέγχεται καὶ οὕτως

$$\sigma_z = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N z_i^2}{N}} = \sqrt{\left(\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{\sigma^2}\right) : N} = \sqrt{\frac{1}{\sigma^2} \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N}}$$

$$\text{καὶ ἔπειδὴ} \quad \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}{N} = \sigma^2$$

$$\text{συμπεραίνομεν} \quad \sigma_z = \sqrt{\frac{1}{\sigma^2} \sigma^2} = 1$$

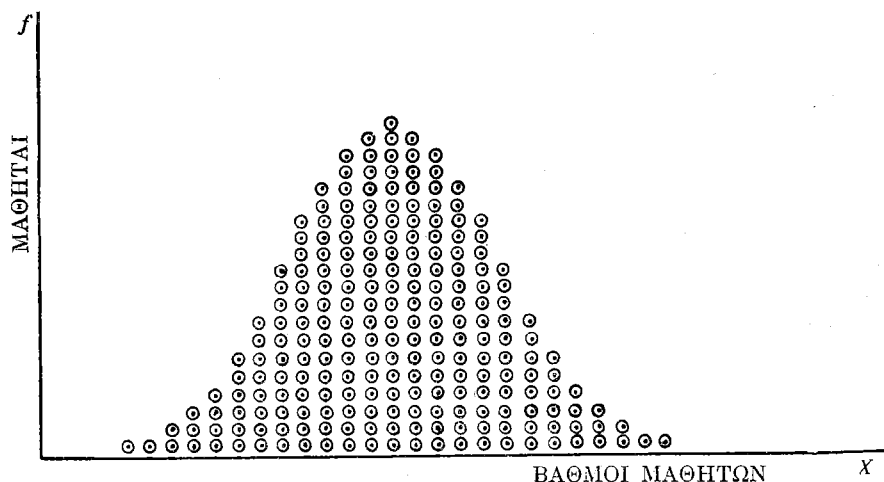
$$\text{*Ομοίως ἀποδεικνύεται καὶ διὰ} \quad s_z = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N z_i^2}{N - 1}} = 1$$

6. ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ἐς θεωρήσωμεν ἕνα μέγαλον ἀριθμὸν μαθητῶν καὶ τοὺς βαθμοὺς των εἰς ἕνα μάθημα. Τοποθετοῦντες τοὺς μαθητὰς εἰς σειρὰς ἀναλόγως τῶν βαθμῶν των, θὰ προσέξωμεν ἀμέσως ὅτι πλησίον τῶν δύο ἄκρων θὰ ὑπάρχουν σχετικῶς ὀλίγοι μαθηταί, ἐνῶ περίξ τοῦ μέσου θὰ κεῖνται οἱ πλεῖστοι ἐξ αὐτῶν. Ἐὰν παραστήσωμεν ἕκαστον μαθητὴν μὲ μίαν κοκκίδα, τότε θὰ παρουσιασθῇ ἡ μορφή ἢ ὁποία ὑπάρχει εἰς τὸ σχ. 21.

Αἱ πλεῖστοι γραφικαὶ κατασκευαὶ τῶν κατανομῶν συχνότητων διὰ μέγαλον πλῆθος παρατηρήσεων ἢ μετρήσεων τείνουν νὰ ἔχουν τὴν μορφήν ἢ ὁποία ἐμφαίνεται κατωτέρω. Ἡ κατανομή αὕτη καλεῖται **κανονικὴ κατανομή** (normal distribution, normal curve).



Σχ. 21

Ἡ κανονικὴ κατανομή εἶναι πλήρως συμμετρικὴ καὶ τείνει εἰς τὸ μηδὲν πρὸς ἀμφοτέρους τὰς διευθύνσεις. Ἐχει ἄξονα συμμετρίας τὴν κάθετον ἢ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ σημεῖον τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν μεγαλύτεραν συχνότητα πρὸς τὸν ὀριζόντιον ἄξονα τῆς βάσεως τῆς κατανομῆς. Εἶναι προφανές ὅτι ὁ ἄξων συμμετρίας διαιρεῖ τὸ ἐμβαδὸν κάτωθεν τῆς καμπύλης εἰς δύο

Ίσα μέρη. Τὸ 50% τοῦ ἐμβαδοῦ εὐρίσκεται ἀριστερὰ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου καὶ τὸ ἕτερον 50% εὐρίσκεται δεξιὰ αὐτοῦ. Ἡ κανονικὴ κατανομὴ εἶναι μεγάλῃς σπουδαιότητος καὶ ἀντιπροσωπεύει γενικῶς τὰς πνευματικὰς ἢ σωματικὰς ἱκανότητας τῶν ἀτόμων.

Ἡ κανονικὴ κατανομὴ ὀρίζεται ὑπὸ τῆς ἐξίσωσως

$$6.1 \quad Y = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

ὅπου Y = τὸ ὕψος τῆς καμπύλης δι' ὠρισμένην τιμὴν τοῦ X .

σ = ἡ τυπικὴ ἀπόκλισις. Νοεῖται ὅτι διαφορετικαὶ κανονικαὶ κατανομαὶ δύνανται νὰ ἔχουν διαφορετικὰς τυπικὰς ἀποκλίσεις. Διὰ δεδομένην κατανομὴν τὸ σ εἶναι σταθερόν.

π = 3,14159 σταθερὰ.

e = 2,71828 σταθερὰ. (Ἡ βάσις τῶν Νεπερίων λογαρίθμων).

X = ἡ τετμημένη (μέτρῃσις ἐπὶ τοῦ ὀριζοντίου ἄξονος).

μ = ὁ ἀριθμητικὸς μέσος τοῦ πληθυσμοῦ.

Τὸ ἐμβαδὸν κάτωθεν τῆς κανονικῆς κατανομῆς καὶ τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων X ἰσοῦται μὲ μίαν τετραγωνικὴν μονάδα. Ὅθεν τὸ ἐμβαδὸν κάτωθι τῆς καμπύλης, μεταξὺ δύο ἀριθμῶν $\alpha < X < \beta$, ἀντιπροσωπεύει τὴν πιθανότητα νὰ εὐρίσκεται τὸ X μεταξὺ τοῦ α καὶ β .

Κάποτε εἶναι ἐπιθυμητὸν νὰ κατασκευάσωμεν τὴν κανονικὴν κατανομὴν, ὥστε νὰ ἔχη τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν μὲ τὸ διδόμενον ἐκ τῆς γραφικῆς παραστάσεως τοῦ ἰστογράμμου συχνότητων. Εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν ἡ ἐξίσωσις τῆς κανονικῆς κατανομῆς γράφεται

$$6.2 \quad Y = \frac{Ni}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

ὅπου N = ὁ ἀριθμὸς τῶν παρατηρήσεων ἢ μετρήσεων καὶ

i = τὸ εὖρος ἐκάστου διαστήματος.

Τὸ ἐμβαδὸν κάτωθεν αὐτῆς τῆς καμπύλης εἶναι Ni τετραγωνικαὶ μονάδες. Ἐὰν τὸ εὖρος ἐκάστου διαστήματος εἶναι $i = 1$, τότε τὸ ἐμβαδὸν θὰ ἰσοῦται μὲ N τετραγωνικὰς μονάδας, δηλ. ὅσον καὶ τὸ πλῆθος τῶν περιπτώσεων.

Ὡς γνωστὸν τὸ τυπικὸν ποσὸν ἔχει ἀριθμητικὸν μέσον ἴσον μὲ μηδὲν καὶ τυπικὴν ἀπόκλισιν ἴσην μὲ τὴν μονάδα.* Ἐκ τούτου ἡ ἐξίσωσις

$$Y = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

μετατρέπεται εἰς τὴν

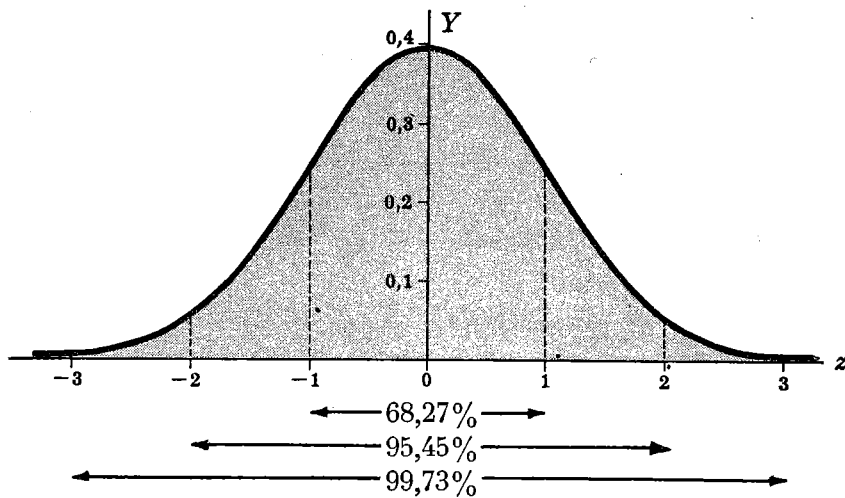
$$6.3 \quad Y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad \text{ὅπου } z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

Εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν λέγομεν ὅτι τὸ z κατανέμεται κανονικῶς μὲ ἀριθμητικὸν μέσον τὸ μηδὲν καὶ τυπικὴν ἀπόκλισιν τὴν μονάδα. Αἱ παρεκτροπαὶ δεξιὰ τοῦ μέσου ὄρου εἶναι θετικαὶ καὶ ἀριστερὰ αὐτοῦ ἀρνητικαί.

Διὰ $z = 0$ ὁ τύπος 6.3 δίδει

$$Y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0,3989 \quad (e^0 = 1)$$

Τοιοιουτρόπως ἡ τεταγμένη εἰς τὸ σημεῖον τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου τῆς κανονικῆς κατανομῆς ἰσοῦται μὲ 0,3989 (σχ. 22).



Σχ. 22

Ὅμοίως διὰ $z = \pm 1$ λαμβάνομεν $Y = 0,2420$
 διὰ $z = \pm 2$ ἔχομεν $Y = 0,0540$ καὶ
 διὰ $z = \pm 3$ τὸ Y ἰσοῦται μὲ 0,0044

*Ἴδε κεφ. 5 «τυπικὴ ἀπόκλισις».

Ἐπειδὴ διὰ κάθε τιμὴν τοῦ z εἶναι δύσκολον εἰς τὴν πρᾶξιν νὰ εὐρίσκεται ἡ τεταγμένη τῆς κανονικῆς καμπύλης, ὑπάρχουν πίνακες (βλ. πίν. I) οἱ ὁποῖοι δίδουν τὸ ὕψος διὰ τὰς τιμὰς τοῦ z μεταξύ $0 \leq z \leq 3,39$.

Τὸ ἔμβαδὸν τῆς κανονικῆς κατανομῆς, τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται μεταξύ τῶν καθέτων εἰς τὰ σημεῖα $z = 0$ καὶ $z = 1$ τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων, δηλ. μεταξύ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου τῆς κατανομῆς καὶ μιᾶς τυπικῆς ἀποκλίσεως, εἶναι 0,34134 (βλ. πίν. II). Ἄλλως, διὰ μίαν συγκεκριμένην κατανομήν τοῦτο σημαίνει ὅτι τὰ 34,134% τῶν περιπτώσεων (μαθητῶν) κεῖνται μεταξύ τοῦ μέσου ὅρου καὶ μιᾶς τυπικῆς ἀποκλίσεως δεξιὰ. Ὅμοιως ἄλλα 34,134% τῶν περιπτώσεων εὐρίσκονται μεταξύ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου καὶ μιᾶς τυπικῆς ἀποκλίσεως ἀριστερά. Μεταξὺ λοιπὸν τοῦ -1σ καὶ $+1\sigma$ θὰ συναντήσωμεν τὰ 68,27% τοῦ συνόλου τῶν μετρήσεων ἢ παρατηρήσεών μας. Ἡ τιμὴ αὕτη ἰσχύει δι' οἰανδήποτε τιμὴν τοῦ σ .

Ἐὰν εἰς ἓνα test εὐφυΐας ὁ ἀριθμητικὸς μέσος εἶναι 100 καὶ ἡ τυπικὴ ἀπόκλις $\sigma = 15$, τότε οἱ λαβόντες I. Q μεταξύ 85 καὶ 115 εἶναι τὰ 68,27% τοῦ συνόλου τοῦ πληθυσμοῦ.

Τὸ ἔμβαδὸν τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξύ τοῦ $z = 0$ καὶ $z = +2$ ἰσοῦται με 0,47725 καὶ ἐκ τῆς συμμετρικότητος τῆς καμπύλης ἐξάγομεν ὅτι τὸ ἔμβαδὸν ἐντὸς τοῦ διαστήματος $z = \pm 2$ ἰσοῦται με 0,9545 τοῦ συνολικοῦ ἔμβαδοῦ κάτωθεν τῆς κανονικῆς κατανομῆς. Σκεπτόμενοι κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον, εὐρίσκομεν ὅτι τὸ ἔμβαδὸν τὸ περιεχόμενον μεταξύ τοῦ $z = -3$ καὶ $z = +3$ ἰσοῦται με 0,9973. Τὸ ἔμβαδὸν μεταξύ $z = 0$ καὶ $z = +3$ ἰσοῦται με 0,49865.

Τὸ ἔμβαδὸν ἐκτὸς αὐτῶν τῶν ὁρίων ἰσοῦται με 0,0027. Ἐπειδὴ ἡ ποσότης αὕτη εἶναι ἀμελητέα, θὰ θεωροῦμεν εἰς τὰς διαφοροὺς ἐφαρμογὰς ὅτι ἡ κανονικὴ κατανομή ἐκτείνεται μεταξύ τῶν ὁρίων $z = \pm 3$.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

A. Νὰ εὐρεθῇ τὸ ἔμβαδὸν κάτωθεν τῆς κανονικῆς κατανομῆς, τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται μεταξύ τῶν διαστημάτων.

α) $z = 0$ καὶ $z = 1,21$ (σχ. 23)

β) $z = -0,69$ καὶ $z = 0$ (σχ. 24)

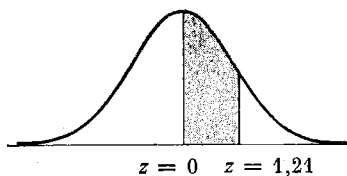
γ) $z = -0,45$ καὶ $z = 2,21$ (σχ. 25)

δ) $z = 0,80$ καὶ $z = 1,94$ (σχ. 26)

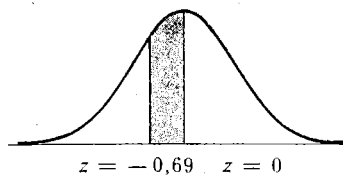
(α) Ἐκ τοῦ πίνακος II εὐρίσκομεν ὅτι τὸ ἔμβαδὸν τὸ περιεχόμενον μεταξύ τοῦ $z = 0$ καὶ $z = 1,21$ εἶναι 0,3869. Ὁ ἀριθμὸς τῆς τομῆς τῆς γραμμῆς 1,2 καὶ τῆς στήλης 1.

(β) Τὸ ἔμβαδὸν τὸ περιεχόμενον μεταξύ τοῦ $z = 0$ καὶ $z = -0,69$

ισοῦται μὲ τὸ ἔμβαδὸν τὸ περιεχόμενον μεταξὺ $z = 0$ καὶ $z = 0,69$, λόγω τῆς συμμετρικότητος τῆς καμπύλης. Ἐκ τούτου ἀρκεῖ νὰ εὗρωμεν τὸ ἔμβαδὸν μεταξὺ τῶν ὁρίων $z = 0$ καὶ $z = 0,69$. Ἡ τομὴ τῆς γραμμῆς 0,6 καὶ τῆς στήλης 9 τοῦ πίνακος II μᾶς δίδει 0,2549, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον ἔμβαδόν.



Σχ. 23



Σχ. 24

(γ) Τὸ ζητούμενον ἔμβαδὸν ἰσοῦται μὲ:

(τὸ ἔμβαδὸν μεταξὺ τοῦ $z = -0,45$ καὶ $z = 0$) +

(τὸ ἔμβαδὸν μεταξὺ τοῦ $z = 0$ καὶ $z = 2,21$) =

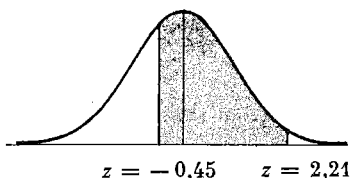
$$0,1736 + 0,4864 = 0,6600$$

(δ) Τέλος τὸ ἔμβαδὸν μεταξὺ τοῦ $z = 0,80$ καὶ $z = 1,94$ =

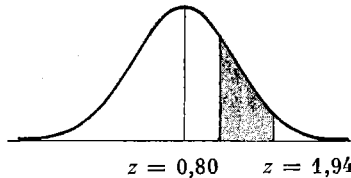
(μὲ τὸ ἔμβαδὸν μεταξὺ τοῦ $z = 0$ καὶ $z = 1,94$) -

(τὸ ἔμβαδὸν μεταξὺ τοῦ $z = 0$ καὶ $z = 0,80$) =

$$0,4738 - 0,2881 = 0,1857$$



Σχ. 25



Σχ. 26

- B. Νὰ εὗρεθoῦν αἱ τιμαὶ τοῦ z , δεξιὰ καὶ ἀριστερὰ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου, ἐντὸς τῶν ὁποίων περιλαμβάνεται α) τὸ 95%
καὶ β) τὸ 99% τοῦ συνολικοῦ ἔμβαδοῦ τοῦ εὐρισκομένου κάτωθεν τῆς καμπύλης.

(α) Ἐπειδὴ ἡ καμπύλη εἶναι συμμετρική, τὸ μέρος τοῦ ἔμβαδοῦ τὸ εὐρισκόμενον δεξιὰ τοῦ μέσου ὅρου θὰ εὕρισκεται καὶ ἀριστερά. Συνεπῶς, δι' ἕκαστον μέρος τὸ ἔμβαδὸν ἰσοῦται μὲ 0,475. Ἐκ τοῦ

πίνακος II βλέπομεν ὅτι διὰ ἐμβαδὸν 0,475 ἀντιστοιχεῖ $z = 1,96$. Ὡστε τὰ ὅρια ἐντὸς τῶν ὁποίων ὑπάρχει τὸ 95% τοῦ ἐμβαδοῦ εἶναι $z = \pm 1,96$. Τὰ ὑπόλοιπα 5% κεῖνται ἐκτὸς αὐτοῦ τοῦ διαστήματος.

- (β) Ἡ αὐτὴ ἐργασία ἀκολουθεῖται διὰ τὴν εὑρεσιν τῶν ὁρίων ἐντὸς τῶν ὁποίων ὑπάρχει τὸ 99% τοῦ ἐμβαδοῦ κάτωθεν τῆς κανονικῆς κατανομῆς. Τὸ 0,495 τοῦ ἐμβαδοῦ εὑρίσκεται μεταξὺ τοῦ $z = 0$ καὶ $z = 2,58$ καὶ τὸ ἕτερον ἥμισυ κεῖται μεταξὺ τοῦ $z = 0$ καὶ $z = -2,58$. Συνεπῶς τὰ ὅρια εἶναι $z = \pm 2,58$. Ἐκτὸς αὐτοῦ τοῦ διαστήματος μόνον τὸ 1% τοῦ ἐμβαδοῦ εὑρίσκεται, δηλ. 0,5% ἀριστερὰ τοῦ $z = -2,58$ καὶ 0,5% δεξιὰ τοῦ $z = +2,58$.

- Γ. Εἰς μίαν κανονικὴν κατανομὴν ἀριθμητικοῦ μέσου $\bar{X} = 100$ καὶ τυπικῆς ἀποκλίσεως $\sigma = 15$ ζητεῖται νὰ εὑρεθοῦν τὰ ὅρια πέριξ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου εἰς ἀρχικὰς μονάδας X , ἐντὸς τῶν ὁποίων ὑπάρχουν τὰ 34% τῶν περιπτώσεων μας.

Ἐπειδὴ ἡ καμπύλη εἶναι κανονικὴ, συμπεραίνομεν ὅτι 17% θὰ εὑρίσκωνται ἀριστερὰ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου καὶ τὰ ὑπόλοιπα 17% δεξιὰ. Ἐκ τοῦ πίνακος II εὑρίσκομεν ὅτι τὸ 0,17 τοῦ ἐμβαδοῦ κάτωθεν τῆς καμπύλης κεῖται εἰς τὸ διάστημα μεταξὺ $z = 0$ καὶ $z = 0,44$, δηλ. τὸ 34% θὰ εἶναι μεταξὺ τοῦ $z = \pm 0,44$.

Διὰ τὴν μετατροπὴν τῶν τιμῶν z εἰς τὰς ἀρχικὰς τιμὰς X χρησιμοποιεῖται ὁ τύπος

$$6.4 \quad z = \frac{X - \bar{X}}{\sigma} \quad \begin{array}{ll} \text{Διὰ} & z = 0,44, \\ & \bar{X} = 100 \\ & \sigma = 15 \end{array}$$

$$\text{ἔπεται} \quad 0,44 = \frac{X - 100}{15} \Rightarrow X = 106,6$$

$$\text{καὶ διὰ} \quad \begin{array}{l} z = -0,44 \\ \bar{X} = 100 \end{array}$$

$$\sigma = 15 \quad \text{ἔχομεν δι' ἐφαρμογῆς τοῦ ἰδίου τύπου,}$$

$$-0,44 = \frac{X - 100}{15} \Rightarrow X = 93,4$$

ἦτοι τὰ 34% τῶν περιπτώσεων μας εὑρίσκονται μεταξὺ τῶν ὁρίων 93,4 καὶ 106,6.

- Δ. (α) Υποθέτομεν ότι οι βαθμοί 4000 μαθητῶν εἰς μίαν γραπτὴν ἐξέτασιν ἀποτελοῦν μίαν κανονικὴν κατανομήν. Ἐὰν ἔχουν ἀριθμητικὸν μέσον $\bar{X} = 100$ καὶ τυπικὴν ἀπόκλισιν $\sigma = 20$, ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ πόσοι μαθηταὶ ἔχουν πάρεϊ βαθμοὺς κυμαινομένους μεταξὺ 100 καὶ 115.

Πρὸς εὑρεσιν τοῦ ζητουμένου ἀρκεῖ νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ z , τῶν τιμῶν 100 καὶ 115.

$$\text{Διὰ } X = 100, \bar{X} = 100, \sigma = 20 \Rightarrow z = \frac{X - \bar{X}}{\sigma} = \frac{100 - 100}{20} = 0$$

$$\text{Διὰ } X = 115, \bar{X} = 100, \sigma = 20 \Rightarrow z = \frac{X - \bar{X}}{\sigma} = \frac{115 - 100}{20} = 0,75$$

Κατόπιν τούτου πρέπει νὰ εὑρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ διαστήματος $z = 0$ καὶ $z = 0,75$, διότι τὸ 115 εἶναι κατὰ 0,75 τυπικῆς ἀποκλίσεως μεγαλύτερον τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου 100. Ἐκ τοῦ πίνακος II μᾶς δίδεται ἡ τιμὴ 0,2734, ἡ ὁποία εἶναι τὸ ἐμβαδὸν μεταξὺ τῶν ὁρίων $z = 0$ καὶ $z = 0,75$ καὶ ἐπομένως 27,34% εἶναι τὸ σύνολον τῶν μαθητῶν τῶν ὁποίων ἡ βαθμολογία εὑρίσκεται μετὰ τοῦ 100 καὶ 115.

Τὰ 27,34% τῶν 4000 μαθητῶν εἶναι 1094 μαθηταὶ καὶ αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς εἶναι ἡ ζητηθεῖσα ἀπάντησις.

- (β) Μία κανονικὴ κατανομὴ 1000 ἐξεταζομένων ἔχει ὡς ἀριθμητικὸν μέσον $\bar{X} = 50$ καὶ τυπικὴν ἀπόκλισιν $\sigma = 15$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν μαθητῶν τῶν ὁποίων οἱ βαθμοὶ εὑρίσκονται εἰς τὰ διαστήματα

$$\text{i) } X_1 = 55 \quad \text{καὶ} \quad X_2 = 75$$

$$\text{ii) } X_3 = 40 \quad \text{καὶ} \quad X_4 = 70$$

- (i) Ἐκ τοῦ τύπου $z = \frac{X - \bar{X}}{\sigma}$ διὰ ἀντικαταστάσεως τῶν δεδομένων λαμβάνομεν

$$z_1 = \frac{55 - 50}{15} = 0,33 \quad \text{καὶ}$$

$$z_2 = \frac{75 - 50}{15} = 1,67$$

Τὸ ἐμβαδὸν τὸ ὁποῖον περιέχεται μετὰ τοῦ

$$z_1 = 0,33 \quad \text{και} \quad z_2 = 1,67 \quad \text{είναι ίσον με} \\ 0,4525 - 0,1293 = 0,3232$$

ήτοι 32,32% των εξεταζομένων έχουν όρια βαθμολογίας μεταξύ του 55 και 75. Το 32,32% των 1000 εξεταζομένων είναι 323 μαθηταί.

$$(ii) \text{ 'Ομοίως εύρισκομεν } z_3 = \frac{40 - 50}{15} = -0,67 \quad \text{και}$$

$$z_4 = \frac{70 - 50}{15} = 1,33$$

Τò έμβαδόν μεταξύ του $z_3 = -0,67$ και $z_4 = 1,33$ ίσουται με τò άθροισμα των έμβαδών των περιεχομένων μεταξύ $z = 0$ και $z_3 = 0,67$ (συμμετρικότης τής καμπύλης) συν τò έμβαδόν τò περιεχόμενον μεταξύ $z = 0$ και $z_4 = 1,33$, ήτοι

$$0,2486 + 0,4082 = 0,6568$$

δηλ. τὰ 65,68% των εξετασθέντων έχουν όρια βαθμολογίας 40 και 70. Τοῦτο μεταφράζεται εις 657 μαθητάς.

ΕΛΕΓΧΟΣ ΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΟΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

A

Υποθέτομεν ότι 100 μαθηταί έβαθμολογήθησαν εις τὰ 'Αγγλικά και Γαλλικά ως εμφαίνεται εις τούς πίνακας 32 και 33. Αί δύο κατανομαί βαθμών

Βαθμοί 'Αγγλικών	
X	f
10	5
9	15
8	30
7	30
6	15
5	5
N = 100	

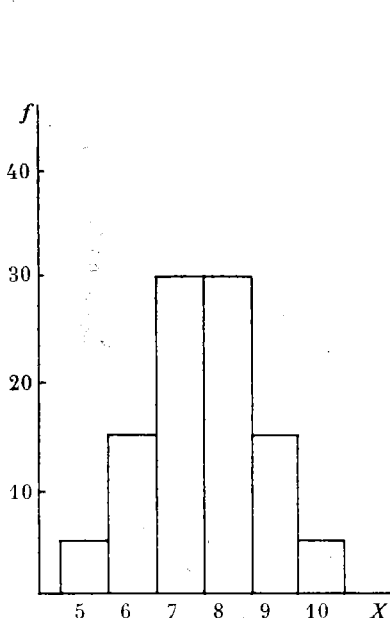
Πίναξ 32

Βαθμοί Γαλλικών	
X	f
10	5
9	10
8	45
7	15
6	20
5	5
N = 100	

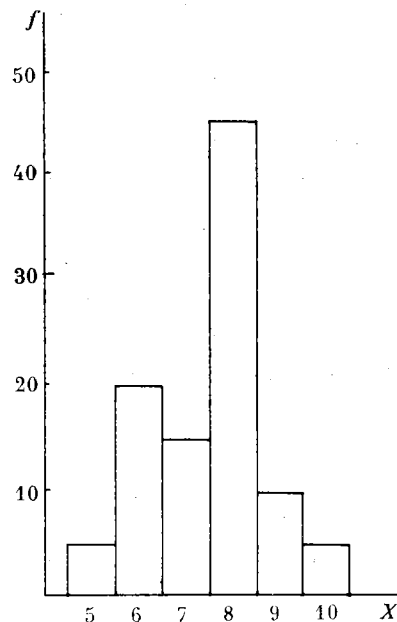
Πίναξ 33

έχουν ίσους αριθμητικούς μέσους $\bar{X} = 7,5$ και ίσας τυπικές αποκλίσεις $s = 1,21$. Μολονότι υπάρχει ισότης τῶν δύο κεντρικῶν ροπῶν, τὰ ιστόγραμμα συχνότητων δὲν συμπίπτουν. Τὸ ιστόγραμμα τοῦ σχ. 27 εἶναι συμμετρικὸν ὡς πρὸς ἄξονα, ἐνῶ δὲν συμβαίνει τὸ ἴδιον μὲ τὸ ιστόγραμμα τοῦ σχ. 28. Τὸ γεγονός τοῦτο μᾶς ὠθεῖ εἰς τὴν εὕρεσιν ἄλλων στατιστικῶν ἐννοιῶν, ἀπαραιτήτων διὰ τὴν πληρεστέραν γνῶσιν τῆς μορφῆς τῶν διαφόρων κατανομῶν.

Ἡ συμμετρία ἢ μὴ μιᾶς κατανομῆς δύναται νὰ ἐκφρασθῇ συναρτήσῃ τῆς διαμέσου καὶ τῆς ἐπικρατοῦσης τιμῆς. Ἐὰν ἡ κατανομή εἶναι συμμετρική,



Σχ. 27



Σχ. 28

ὁ ἀριθμητικὸς μέσος, ἡ διάμεσος καὶ ἡ ἐπικρατοῦσα τιμὴ συμπίπτουν, ἄλλως ἐν γένει θὰ ὑπάρχῃ ἀσυμφωνία μεταξύ τῶν 3 κεντρικῶν ροπῶν.

Ἐνας συντελεστὴς βοηθητικὸς διὰ τὴν πληρεστέραν γνῶσιν τῆς κατανομῆς παρέχεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$6.5 \quad P_c = \frac{\bar{X} - E_\tau}{s}$$

ὅπου $\bar{X}$ ὁ ἀριθμητικὸς μέσος

E_τ ἡ ἐπικρατοῦσα τιμὴ

καὶ s ἡ τυπικὴ ἀπόκλισις.

Ἡ τιμὴ τοῦ P_c καλεῖται **συντελεστής λοξότητος τοῦ Pearson** (Pearsonian coefficient of skewness). Ὁ συντελεστής οὗτος περιγράφει τὴν μορφήν τῆς κατανομῆς καὶ δὲν ἐπηρεάζεται ἀπὸ τὴν ἀλλαγὴν τῆς κλίμακος.

Ὁ τύπος αὐτὸς ἔχει τὸ μειονέκτημα νὰ μᾶς ἐμπλέκη μὲ τὴν ἐπικρατοῦσαν τιμὴν, ἢ ὁποία δυνατὸν νὰ μὴν ὑπάρχῃ, ἢ νὰ ἔχωμεν δύο ἐπικρατοῦσας τιμὰς. Δὲν ὑπάρχει εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν εἰς σύνολον μετρήσεων δὲν ἐδόθησαν δύο τιμαὶ αἱ ὁποῖαι νὰ συμπίπτουν. Ἀσφαλῶς θὰ εἶναι χωρὶς ἔννοιαν, ἐὰν λεχθῇ ὅτι ἐκάστη τιμὴ εἶναι καὶ μία ἐπικρατοῦσα τιμὴ.

Τὸ μειονέκτημα τοῦτο δύναται νὰ παρακαμφθῇ, ἐὰν χρησιμοποιήσωμεν τὸν τύπον

$$6.6 \quad E_r = 3\delta - 2\bar{X} \quad (\delta = \text{διάμεσος})$$

ὁ ὁποῖος κατὰ προσέγγισιν μᾶς δίδει τὴν ἐπικρατοῦσαν τιμὴν. Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὸν τύπον 6.5 τοῦ E_r , λαμβάνομεν

$$6.7 \quad P_c = \frac{3(\bar{X} - \delta)}{s}$$

Ἀντικαθιστῶμεν τὰς τιμὰς $\bar{X} = 7,5$, $\delta = 7,5$, $s = 1,21$ τοῦ πίνακος 32 καὶ λαμβάνομεν

$$P_c = \frac{3(7,5 - 7,5)}{1,21} = 0$$

Αἱ τιμαὶ $\bar{X} = 7,5$, $\delta = 7,72$ καὶ $s = 1,21$ τοῦ πίνακος 33 μᾶς δίδουν συντελεστὴν λοξότητος

$$P_c = \frac{3(7,5 - 7,72)}{1,21} = -0,5454$$

Ὅταν $P_c = 0$, τότε κατ' ἐνδειξιν ὑπάρχει συμμετρία εἰς τὴν κατανομήν.

Ἄν $P_c > 0$, δηλ. ὅταν $\bar{X} > \delta$, τότε ἡ καμπύλη εἶναι θετικῶς λοξή.

Ἀρνητικῶς λοξή εἶναι ὅταν $P_c < 0$. Τοῦτο συμβαίνει, ὅταν $\bar{X} < \delta$.

B

Ἡ πλέον διαδεδομένη μέτρησις πρὸς καθορισμὸν τοῦ εἴδους τῆς λοξότητος μιᾶς κατανομῆς διὰ μὴ ὁμαδοποιημένα δεδομένα εἶναι ἡ διδομένη ὑπὸ τοῦ τύπου

$$6.8 \quad m_3 = \frac{\frac{1}{N} \sum (X - \bar{X})^3}{s^3} = \frac{\frac{1}{N} \sum x^3}{s^3}$$

Διὰ ὁμαδοποιημένα στοιχεῖα ὁ τύπος 6.8 μετατρέπεται εἰς τὸν

$$6.9 \quad m_3 = \frac{\frac{1}{N} \sum f(X - \bar{X})^3}{s^3} = \frac{\frac{1}{N} \sum fx^3}{s^3}$$

Οἱ τύποι 6.8 καὶ 6.9 ἐφαρμόζονται μόνον ὅταν ἔχωμεν δείγματα. Διὰ πληθυσμοὺς ἀντικαθιστῶμεν τὸ $\bar{X}$ καὶ s διὰ τῶν μ καὶ σ .

“Ὅταν ὁ ἀριθμητικὸς μέσος δὲν εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς καὶ κατ’ ἀνάγκην θὰ χρησιμοποιηθῇ ὁ X_v , ἥ ὅταν δὲ μᾶς παρέχεται ἡ δυνατότης χρησιμοποιοῦσας ὑπολογιστικῆς μηχανῆς, τότε καλὸν εἶναι ὅπως χρησιμοποιεῖται ὁ ἰσοδύναμος τύπος

$$6.10 \quad m_3 = \frac{c^3}{s^3} \left[\frac{\sum fx^3}{N} - 3 \left(\frac{\sum fx^2}{N} \right) \left(\frac{\sum fx}{N} \right) + 2 \left(\frac{\sum fx}{N} \right)^3 \right]$$

ὅπου c τὸ εὔρος ἐκάστου διαστήματος.

Μὲ τὰ δεδομένα τοῦ πίνακος 33, διὰ τὴν εὔρεσιν τοῦ m_3 ἐκ τοῦ τύπου 6.9, κατασκευάζομεν τὸν πίνακα 34.

X	f	$x = X - \bar{X}$	fx	fx^2	fx^3	fx^4
10	5	2,5	12,5	31,25	78,125	195,3125
9	10	1,5	15,0	22,50	33,750	50,6250
8	45	0,5	22,5	11,25	5,625	2,8125
7	15	-0,5	-7,5	3,75	-1,875	0,9375
6	20	-1,5	-30,0	45,00	-67,500	101,2500
5	5	-2,5	-12,5	31,25	-78,125	195,3125
$\sum f = N = 100$		$\sum x = 0$	$\sum fx = 0$	$\sum fx^2 = 145,00$	$\sum fx^3 = -30$	$\sum fx^4 = 546,2500$

Πίναξ 34

Δι’ ἀντικαταστάσεως λαμβάνομεν

$$m_3 = \frac{\frac{1}{N} \sum fx^3}{s^3} = \frac{\frac{1}{100} \cdot (-30)}{(1,21)^3} = -0,1693$$

Μολοντί ὁ τύπος 6.10 φαίνεται δύσκολος, ἡ ἐφαρμογὴ του εἶναι εὐκόλος,

ἐὰν ἀκολουθηθῇ ἡ πορεία τοῦ πίνακος 35. Ἡ χρῆσις τοῦ ὑποθετικοῦ μέσου $\bar{X}_v = 8$, εὐκολύνει πολὺ τὰς διαφορικοὺς πράξεις διὰ τὴν εὐρεσιν τοῦ m_3 .

X	f	$x = X - \bar{X}_v$	fx	fx^2	fx^3	fx^4
10	5	+ 2	+ 10	20	+ 40	80
9	10	+ 1	+ 10	10	+ 10	10
8	45	0	0	0	0	0
7	15	- 1	- 15	15	- 15	15
6	20	- 2	- 40	80	- 160	320
5	5	- 3	- 15	45	- 135	405
	$\Sigma f = N = 100$		$\Sigma fx = -50$	$\Sigma fx^2 = 170$	$\Sigma fx^3 = -260$	$\Sigma fx^4 = 830$

Πίναξ 35

Τὰς τιμὰς

$$c = 1$$

$$s = 1,21$$

$$N = 100$$

$$\Sigma fx^3 = -260$$

$$\Sigma fx^2 = 170$$

$$\Sigma fx = -50$$

τὰς ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὸν τύπον 6.10

καὶ ἔχομεν

$$m_3 = \frac{1^3}{(1,21)^3} \left[\frac{-260}{100} - 3 \cdot \frac{170}{100} \cdot \frac{(-50)}{100} + 2 \left(\frac{-50}{100} \right)^3 \right]$$

$$m_3 = \frac{1}{1,771561} \left[-2,6 + 5,1 \cdot 0,5 - 0,25 \right] = -0,1693$$

Εὐρέθη ἡ αὐτὴ τιμὴ, ὡς ἡ ὑπολογισθεῖσα ἐκ τοῦ τύπου 6.9.

Ἄξιον παρατηρήσεως εἶναι ὅτι ὁ συντελεστὴς λοξότητος τοῦ Pearson, μὲ τὰ δεδομένα τοῦ πίνακος 33, εἶναι

$$P_c = -0,5454 < 0, \text{ ἀλλὰ καὶ } m_3 = -0,1693 < 0.$$

Βλέπομεν ὅτι ὑπάρχει συμφωνία μεταξύ τῶν P_c καὶ m_3 , ὡς πρὸς τὴν λοξότητα τῆς καμπύλης. Ἐπειδὴ $m_3 < 0$, ἡ καμπύλη εἶναι ἀρνητικῶς λοξή.

Διὰ $m_3 > 0$, ἡ καμπύλη εἶναι θετικῶς λοξή. Ὄταν $m_3 = 0$, ἡ καμπύλη εἶναι συμμετρική.

Τὰ δεδομένα τοῦ πίνακος 32 μᾶς δίδουν ἰστόγραμμα συννοτήτων τὸ (σχ. 27), τὸ ὁποῖον ἔχει ἄξονα συμμετρίας. Ἡ καμπύλη ἡ προκύπτουσα ἐξ αὐτοῦ εἶναι συμμετρική. Ἡ ἐφαρμογὴ τῶν τύπων 6.9 καὶ 6.10 μᾶς δίδει $m_3 = 0$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ ἀπαραίτητος συνθήκη διὰ συμμετρικότητα.

Εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν $m_3 \neq 0$, τότε ἡ κατανομὴ δὲν εἶναι συμμετρική, ἀφοῦ εἶναι λοξή, ἀρνητικῶς ἢ θετικῶς, καὶ κατὰ συνέπειαν δὲν εἶναι κανονική. Ὄταν ὅμως $m_3 = 0$, τότε εἶναι συμμετρική ἡ κατανομή, ἀλλ' ὅχι ἀπαραίτητως κανονική.

Διὰ συμμετρικὴν καμπύλην εἶναι δυνατόν νὰ παρουσιασθοῦν τρεῖς περιπτώσεις. Νὰ εἶναι **κανονική** (normal curve), νὰ εἶναι **πλατύκυρτος** (platykurtic) ἢ νὰ εἶναι **λεπτόκυρτος** (leptokurtic). Ἡ εὕρεσις τοῦ εἶδους τῆς μορφῆς τῆς καμπύλης παρέχεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$6.11 \quad m_4 = \frac{\frac{1}{N} \sum f(X - \bar{X})^4}{s^4} = \frac{\frac{1}{N} \sum fx^4}{s^4}$$

ὅταν $\bar{X}$ εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός, ἄλλως χρησιμοποιεῖται ὁ ἰσοδύναμος τύπος

$$6.12 \quad m_4 = \frac{c^4}{s^4} \left[\frac{\sum fx^4}{N} - 4 \left(\frac{\sum fx^3}{N} \right) \left(\frac{\sum fx}{N} \right) + 6 \left(\frac{\sum fx^2}{N} \right) \left(\frac{\sum fx}{N} \right)^2 - 3 \left(\frac{\sum fx}{N} \right)^4 \right]$$

Ἡ ἀντικατάστασις τῆς τιμῆς $\sum fx^4 = 546,25$ (πίν. 34, στήλη 7) εἰς τὸν τύπον 6.11 μᾶς δίδει

$$m_4 = \frac{1}{100} \cdot 546,25 = \frac{546,25}{2,14358881} = 2,5483$$

Ἐκ τῶν στοιχείων τοῦ πίνακος 35, δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὸν τύπον 6.12 λαμβάνομεν

$$m_4 = \frac{1}{2,144} \left[\frac{830}{100} - 4 \left(\frac{-260}{100} \right) \left(\frac{-50}{100} \right) + 6 \left(\frac{170}{100} \right) \left(\frac{-50}{100} \right)^2 - 3 \left(\frac{-50}{100} \right)^4 \right]$$

$$m_4 = \frac{1}{2,144} \left[8,3 - 5,2 + 2,55 - 0,1875 \right] = 2,5483$$

Αἱ δύο τιμαὶ τῶν τύπων 6.11 καὶ 6.12 συμπίπτουν.

Ἐὰν ἡ κατανομὴ ᾗτο κανονική, τότε ἔπρεπε τὸ $m_4 = 3$. Εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν δὲν ᾗτο δυνατὴ ἡ εὕρεσις τῆς τιμῆς $m_4 = 3$, διότι ἡ τιμὴ

$m_3 = -0,1693 \neq 0$ μάς προειδοποίησε ότι ή κατανομή δέν είναι συμμετρική. 'Εφ' όσον δέν είναι συμμετρική, δέν είναι δυνατόν νά είναι κανονική. 'Επειδή $m_4 = 2,5483 < 3$, τότε ή κατανομή είναι πλατύκυρτος. 'Εάν $m_4 > 3$, τότε ή κατανομή είναι λεπτόκυρτος.

Θεωρούμεν τās κατανομάς τών πινάκων 36 και 37. 'Αμφότεραι αί κατανομαί έχουν τόν αὐτόν ἀριθμητικόν μέσον $\bar{X} = 7$, τήν αὐτήν τυπικήν

X	f
10	6
9	9
8	10
7	50
6	10
5	9
4	6
$\Sigma f = N = 100$	

Πίναξ 36

X	f
10	4
9	11
8	20
7	30
6	20
5	11
4	4
$\Sigma f = N = 100$	

Πίναξ 37

ἀπόκλινσιν $s = 1,421$ και είναι συμμετρικαί, ώς φαίνεται ἀπό τὰ ιστόγραμμα συχνοτήτων των, 29 και 30. 'Εκτός τῆς μορφῆς τών ιστογράμμων, δυνάμεθα νά ἀποδείξωμεν ότι είναι συμμετρικαί αί κατανομαί, ἐάν ἀντικαταστήσωμεν τὰ εὑρεθέντα στοιχεῖα τών πινάκων 38 και 39 εἰς τόν τύπον 6.10. Εἰς τοὺς πίνακας 38 και 39 χρησιμοποιοῦνται τὰ δεδομένα τών πινάκων 36 και 37.

'Αντικαθιστῶμεν εἰς τόν τύπον 6.10

$$m_3 = \frac{c^3}{s^3} \left[\frac{\Sigma fx^3}{N} - 3 \left(\frac{\Sigma fx^2}{N} \right) \left(\frac{\Sigma fx}{N} \right) + 2 \left(\frac{\Sigma fx}{N} \right)^3 \right]$$

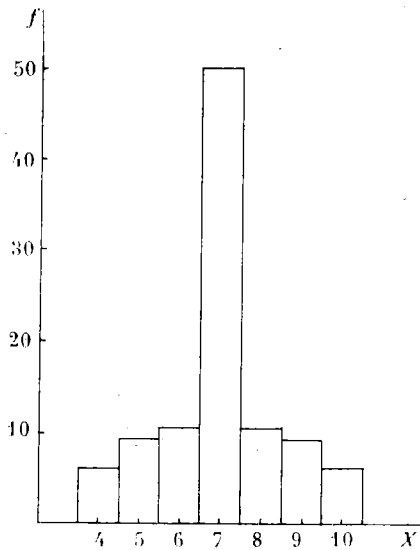
τὰ ὑπολογισθέντα στοιχεῖα τοῦ πίνακος 38 και εὑρίσκομεν

$$m_3 = \frac{1^3}{(1,421)^3} \left[0 \right] = 0^*$$

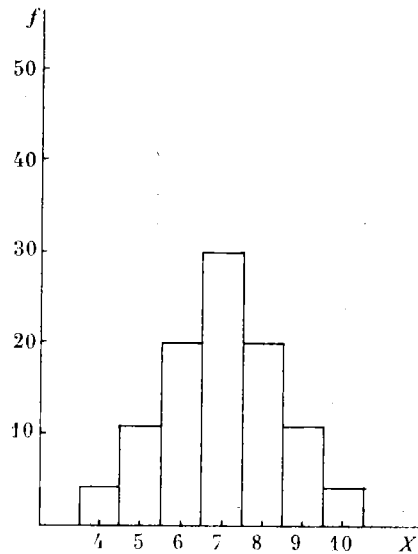
* 'Η τιμή τοῦ s ἐδόθη ἀπό τόν γνωστόν τύπον

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma fx^2 - \frac{(\Sigma fx)^2}{N}}{N-1}}$$

Δι' αντικαταστάσεως εις τὸν ἴδιον τύπον τῶν στοιχείων τοῦ πίνακος 39, εὐρίσκομεν πάλιν $m_3 = 0$. Εἶναι γεγονὸς πλέον ὅτι αἱ κατανομαὶ εἶναι



Σχ. 29



Σχ. 30

συμμετρικαί. Μένει νὰ ἐλέγξωμεν ἐὰν εἶναι καὶ κανονικαί. Ὁ τύπος 6.12 εἶναι ἐκεῖνος ὁ ὁποῖος θὰ μᾶς βοηθήσῃ.

X	f	$x = X - \bar{X}_v$	fx	fx^2	fx^3	fx^4
10	6	+ 3	18	54	162	486
9	9	+ 2	18	36	72	144
8	10	+ 1	10	10	10	10
7	50	0	0	0	0	0
6	10	- 1	- 10	10	- 10	10
5	9	- 2	- 18	36	- 72	144
4	6	- 3	- 18	54	- 162	486
	$N=100$		$\Sigma fx=0$	$\Sigma fx^2=200$	$\Sigma fx^3=0$	$\Sigma fx^4=1280$

Ὁ πίναξ 38 μᾶς δίδει

$$c = 1$$

$$s = 1,421$$

$$N = 100$$

$$\Sigma fx = 0$$

$$\Sigma fx^2 = 200$$

$$\Sigma fx^3 = 0$$

$$\Sigma fx^4 = 1280$$

Ἀντικαθιστῶμεν αὐτὰς τὰς τιμὰς εἰς τὸν τύπον 6.₁₂

$$m_4 = \frac{1}{(1,421)^4} \left[\frac{1280}{100} \right] = 3,1393$$

Ἐπειδὴ $m_4 = 3,1393 > 3$, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ κατανομὴ τῶν στοιχείων τοῦ πίνακος 38 δὲν εἶναι κανονικὴ, ἀλλὰ λεπτόκυρτος. Ἡ μορφή τῆς καμπύλης ἡδύνατο νὰ ἐξαχθῇ εὐκόλως καὶ ἐκ τοῦ ἱστογράμμου 29.

X	f	$x = X - \bar{X}_v$	fx	fx^2	fx^3	fx^4
10	4	+ 3	12	36	108	324
9	11	+ 2	22	44	88	196
8	20	+ 1	20	20	20	20
7	30	0	0	0	0	0
6	20	- 1	- 20	20	- 20	20
5	11	- 2	- 22	44	- 88	196
4	4	- 3	- 12	36	- 108	324
	$N = 100$		$\Sigma fx = 0$	$\Sigma fx^2 = 200$	$\Sigma fx^3 = 0$	$\Sigma fx^4 = 1080$

Πίναξ 39

Εἰς τὸν ἴδιον τύπον 6.₁₂ ἀντικαθιστῶμεν τὰ ὑπολογισθέντα στοιχεῖα τοῦ πίνακος 39.

$$m_4 = \frac{1}{(1,421)^4} \left[\frac{1080}{100} \right] = 2,6488$$

Ἡ τιμὴ τοῦ $m_4 = 2,6488 < 3$. Ἡ ἀνισότης αὕτῃ δηλοῖ ὅτι ἡ καμπύλη δὲν εἶναι κανονικὴ, ἀλλὰ πλατύκυρτος.

Γ

Μία άλλη σειρά τύπων διὰ τὸν ἔλεγχον τῆς κανονικότητος μιᾶς καμπύλης εἶναι ἡ κάτωθι.

$$6.13 \quad v_1 = \frac{\Sigma fx}{N}$$

$$6.14 \quad v_2 = \frac{\Sigma fx^2}{N}$$

$$6.15 \quad v_3 = \frac{\Sigma fx^3}{N}$$

$$6.16 \quad v_4 = \frac{\Sigma fx^4}{N}$$

$$6.17 \quad \mu_2 = v_2 - v_1^2$$

$$6.18 \quad \mu_3 = v_3 - 3v_1v_2 + 2v_1^3$$

$$6.19 \quad \mu_4 = v_4 - 4v_1v_3 + 6v_1^2v_2 - 3v_1^4$$

} διὰ μὴ ὁμαδοποιημένα δεδομένα.

$$6.17a \quad \mu_2 = v_2 - v_1^2 - \frac{1}{12}$$

$$6.18a \quad \mu_3 = v_3 - 3v_1v_2 + 2v_1^3$$

$$6.19a \quad \mu_4 = v_4 - 4v_1v_3 + 6v_1^2v_2 - 3v_1^4 - \frac{\mu_2}{2} - \frac{1}{80}$$

} διὰ ὁμαδοποιημένα
δεδομένα.

$$6.20 \quad \beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}$$

$$6.21 \quad \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

$$6.22 \quad \gamma_1 = \pm \sqrt{\beta_1} \quad (\text{Τὸ } \gamma_1 \text{ ἔχει τὸ πρόσημον τοῦ } \mu_3)$$

$$6.23 \quad \gamma_2 = \beta_2 - 3$$

Κατὰ πόσον ἡ κατανομή εἶναι συμμετρικὴ ἢ ὄχι, συμπεραίνεται ἐκ τοῦ γ_1 . Τὸ γ_2 μετρᾷ τὴν κυρτότητα τῆς καμπύλης.

Ἐκ πρώτης ὄψεως οἱ δοθέντες τύποι φαίνονται δύσκολοι, ἀλλὰ εἶναι σχε-

τικῶς εὐκολοί εἰς τὴν ἐφαρμογὴν.

Μὲ βάσιν τὰ στοιχεῖα τοῦ πίνακος 38, εὐρίσκομεν ἐκ τῶν τύπων 6.13 ἕως 6.23

$$v_1 = \frac{\Sigma fx}{N} = \frac{0}{100} = 0$$

$$v_2 = \frac{\Sigma fx^2}{N} = \frac{200}{100} = 2$$

$$v_3 = \frac{\Sigma fx^3}{N} = \frac{0}{100} = 0$$

$$v_4 = \frac{\Sigma fx^4}{N} = \frac{1280}{100} = 12,8$$

$$\mu_2 = v_2 - v_1^2 - \frac{1}{12} = 2 - \frac{1}{12} = 1,9167$$

$$\mu_3 = v_3 - 3v_1v_2 + 2v_1^3 = 0$$

$$\mu_4 = v_4 - 4v_1v_3 + 6v_1^2v_2 - 3v_1^4 - \frac{\mu_2}{2} - \frac{1}{80} = 12,8 - \frac{1,9167}{2} - \frac{1}{80} = 11,82915$$

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \frac{0}{(1,9167)^3} = 0$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{11,82915}{(1,9167)^2} = 3,2199$$

$$\gamma_1 = \sqrt{\beta_1} = \sqrt{0} = 0$$

$$\gamma_2 = \beta_2 - 3 = 3,2199 - 3 = 0,2199$$

Ἡ τιμὴ $\gamma_1 = 0$ (προϋποθέτει $\beta_1 = 0$) μᾶς πληροφορεῖ ὅτι ἡ κατανομὴ εἶναι συμμετρική.

Τὸ ὅτι $\gamma_2 = 0,2199 > 0$ (προϋποθέτει $\beta_2 > 3$), συμπεραίνομεν ὅτι ἡ καμπύλη τῶν δεδομένων τοῦ πίνακος 38 εἶναι λεπτόκυρτος.

Εἰς τὴν πράξιν ὅμως ποτὲ δὲν πρέπει νὰ προσδοκῶμεν ὅτι θὰ μᾶς δοθοῦν $\gamma_1 = 0$ καὶ $\gamma_2 = 0$, ὥστε νὰ συμπεράνωμεν ὅτι τὰ δεδομένα ἀποτελοῦν κανονικὴν κατανομήν.

Ὡρισμέναι τιμαὶ περίξ τοῦ μηδενὸς εἶναι δυνατόν νὰ θεωρηθοῦν ὅτι μᾶς δίδουν καμπύλας, τῶν ὁποίων αἱ διαφοραὶ ἐκ τῆς κανονικῆς καμπύλης δὲν

είναι στατιστικῶς σημαντικά (βλ. κεφ. 14).

Ὁ πίναξ 39 μᾶς δίδει

$$\begin{aligned} \nu_1 &= 0 & \beta_1 &= 0 \\ \nu_2 &= 2 & \beta_2 &= 2,6755 \\ \nu_3 &= 0 & \gamma_1 &= 0 \\ \nu_4 &= 10,8 & \gamma_2 &= -0,3245 \\ \mu_2 &= 1,9167 \\ \mu_3 &= 0 \\ \mu_4 &= 9,82915 \end{aligned}$$

Ἐπειδὴ $\gamma_1 = 0$, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ κατανομὴ εἶναι συμμετρικὴ καὶ ἐπειδὴ $\gamma_2 = -0,3245 < 0$, ὅτι ἡ καμπύλη μας εἶναι πλατύκυρτος.

Γενικῶς παρατηροῦμεν ὅτι τὰ ἐξαχθέντα συμπεράσματα συμφωνοῦν ἀπολύτως μὲ ἐκεῖνα τῶν τύπων 6.₁₁ καὶ 6.₁₂.

Ἡ ἐφαρμογὴ τῶν τύπων 9.₁₃-6.₂₃ εἰς τὰ δεδομένα τοῦ πίνακος 35 μᾶς δίδουν

$$\begin{aligned} \nu_1 &= -0,5 & \beta_1 &= 0,03526 \\ \nu_2 &= 1,7 & \beta_2 &= 2,5519 \\ \nu_3 &= -2,6 & \gamma_1 &= -0,188 \\ \nu_4 &= 8,3 & \gamma_2 &= -0,4481 \\ \mu_2 &= 1,3667 \\ \mu_3 &= -0,30 \\ \mu_4 &= 4,76665 \end{aligned}$$

Τὸ $\gamma_1 = -0,188 < 0$. Ἡ τιμὴ αὐτὴ τοῦ γ_1 μᾶς λέγει ὅτι ἡ κατανομὴ δὲν εἶναι συμμετρικὴ, ἀλλὰ ἀρνητικῶς λοξή. Ἡ ἀπλὴ ἐπιβεβαίωσις εἶναι τὸ ιστόγραμμα τοῦ σχ. 28.

Ἡ τιμὴ τοῦ $\gamma_2 = -0,4481 < 0$ μᾶς πληροφορεῖ ὅτι ἡ καμπύλη μας εἶναι πλατύκυρτος.

Ἐὰν τὸ $\gamma_1 > 0$, τότε ἡ κατανομὴ πάλιν δὲν θὰ ᾔτο συμμετρικὴ, ἀλλὰ θετικῶς λοξή, μὲ μεγαλύτερον **πλόκαμον** (tail) εἰς τὰ δεξιὰ. Διὰ $\gamma_2 > 0$, ἡ καμπύλη εἶναι λεπτόκυρτος.