

7. ΕΛΕΓΧΟΣ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΥΠΟΘΕΣΙΣ:

Εἰς τὴν στατιστικὴν ὀρίζομεν ὡς **ὑπόθεσιν** (hypothesis) μίαν πρότασιν, ἢ ὁποία δυνατόν νὰ εἶναι ὀρθή ἢ νὰ μὴν εἶναι καὶ ἢ ὁποία ἔχει σχέσιν μὲ ἓνα ἢ περισσότερους πληθυσμούς.

Ἡ ἀλήθεια τῆς στατιστικῆς ὑποθέσεως ποτὲ δὲν εἶναι γνωστή, ἐκτὸς ἐὰν ληφθοῦν ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ πληθυσμοῦ καὶ γίνη ἡ κατάλληλος ἐπεξεργασία των. Αὐτὸ ἀσφαλῶς δὲν εἶναι κατορθωτὸν εἰς τὰς πλείστας τῶν περιπτώσεων. Λόγω αὐτῆς τῆς ἀδυναμίας λαμβάνομεν ἓνα ἀντιπροσωπευτικὸν καὶ τυχαῖον δείγμα ἐκ τοῦ πληθυσμοῦ καὶ προσπαθοῦμεν νὰ ἐλέγξωμεν μὲ τὰ ἐξαχθέντα χαρακτηριστικὰ στοιχεῖα τοῦ δείγματος, ἐὰν ἡ διατυπωθεῖσα στατιστικὴ ὑπόθεσις εἶναι ἀληθὴς ἢ ψευδής. Ἐὰν ἐκ τοῦ δείγματος ὑπάρξῃ μαρτυρία ἀσυμφωνίας πρὸς τὴν ὑπόθεσιν, τότε ὀδηγούμεθα εἰς τὴν ἀπόρριψίν της. Ἀλλως, ἐὰν ὑπάρξῃ μαρτυρία ἢ ὁποία νὰ ἐνισχύῃ τὴν ὑπόθεσιν, ὀδηγούμεθα εἰς τὴν ἀποδοχὴν της. Τονίζεται ὅτι ἡ ἀποδοχὴ τῆς στατιστικῆς ὑποθέσεως ὀφείλεται εἰς τὴν ἔλλειψιν ἐπαρκοῦς μαρτυρίας διὰ τὴν ἀπόρριψίν της. Δὲν συνεπάγεται ὅμως ὅτι εἶναι καὶ ὀρθή.

Ἐστω ὅτι ζητεῖται νὰ ἐλεγχθῇ, ἐὰν ἓνα κέρμα εἶναι ἐλαττωματικὸν ἢ ὄχι. Θεωροῦμεν ὡς ὑπόθεσιν τὴν πιθανότητα $p = \frac{1}{2}$ ἐμφανίσεως «γραμμάτων», νοουμένου ὅτι τὸ πλῆθος τῶν ρίψεων τοῦ κέρματος τείνει εἰς πολὺ μεγάλον ἀριθμόν. Εἰς τὰς 1000 ρίψεις ὑποθέτομεν ὅτι ἔχουν ἐμφανισθῇ 498 φορές τὰ «γράμματα». Αὐτὸ τὸ ἀποτέλεσμα ἐνισχύει τὴν ὑπόθεσιν $p = \frac{1}{2}$. Τοιοῦτοτρόπως γίνεται ἀποδεκτὴ ἡ στατιστικὴ ὑπόθεσις ὅτι τὸ κέρμα δὲν εἶναι ἐλαττωματικόν. Ἐὰν ὅμως κατὰ τὰς ρίψεις τοῦ κέρματος ἐπαρουσιάζοντο 350 περιπτώσεις «γράμματα», τότε θὰ ὀδηγούμεθα εἰς τὴν ἀπόρριψιν τῆς ὑποθέσεως $p = \frac{1}{2}$.

Ἐφιστᾶται ἡ προσοχή, εἰς τὸ γεγονός ὅτι ἡ ἀπόρριψις τῆς ὑποθέσεως δὲν συνεπάγεται ὅτι εἶναι καὶ ψευδὴς ἡ ὑπόθεσις. Ἡ ἀποδοχὴ τῆς ὑποθέσεως ἔχει τὴν ἔννοιαν ὅτι δὲν ὑπάρχει ἐπαρκὴς μαρτυρία νὰ πιστεύωμεν ἄλλως. Διὰ τοῦτο ὁ ἐρευνητὴς ὀφείλει πάντοτε νὰ ὀρίζῃ τὴν ὑπόθεσιν, τὴν ὁποίαν προσπαθεῖ νὰ ἀπορρίψῃ.

ΜΗΔΕΝΙΚΗ ΥΠΟΘΕΣΙΣ

Υπόθεσις τὴν ὁποίαν ὀρίζομεν μὲ τὴν ἐλπίδα τῆς ἀπορρίψεως τῆς καλεῖται **μηδενικὴ ὑπόθεσις** (null hypothesis) καὶ συμβολίζεται μὲ H_0 . Ἡ ἀπόρριψις τῆς H_0 μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὴν ἀποδοχὴν τῆς ἐναντίας ὑποθέσεως, τὴν ὁποίαν συμβολίζομεν μὲ H_1 . Εἰς τὸ παράδειγμά μας ὡς μηδενικὴ ὑπόθεσις H_0 θεωρεῖται ἡ πιθανότης $p = \frac{1}{2}$ καὶ ὡς ἐναντία ὑπόθεσις ἡ $H_1 : p \neq \frac{1}{2}$.

Θεωροῦμεν ἐπὶ πλέον καὶ τὸ ἐξῆς παράδειγμα. Δύο τμήματα μαθητῶν Α καὶ Β διδάσκονται μὲ δύο διαφορετικὰς μεθόδους διδασκαλίας. Ἐνα κοινὸν test ἔδωκε τοὺς ἀριθμητικοὺς μέσους $\bar{X}_A$ καὶ $\bar{X}_B$. Οἱ ἀριθμητικοὶ μέσοι $\bar{X}_A$ καὶ $\bar{X}_B$ θεωροῦνται ὅτι εἶναι ἐκτιμήσεις τῶν μέσων τῶν πληθυσμῶν μ_A καὶ μ_B . Μηδενικὴ ὑπόθεσις θεωρεῖται ὁ μηδενισμὸς τῆς διαφορᾶς τῶν μέσων τῶν δύο πληθυσμῶν, ἥτοι $H_0 : \mu_A - \mu_B = 0$. Οἱ δύο πληθυσμοὶ ἔχουν δηλαδὴ ἴσους ἀριθμητικοὺς μέσους. Τὸ ὅτι λέγομεν ὅτι ἔχομεν δύο πληθυσμούς, τῶν ὁποίων αἱ μέσαι τιμαὶ $\mu_A = \mu_B$, ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι τὰ δύο δείγματα προέρχονται ἐκ τοῦ αὐτοῦ πληθυσμοῦ. Ἐλέγχοντες τὴν μηδενικὴν ὑπόθεσιν $H_0 : \mu_A - \mu_B = 0$, εἶναι ἀναγκαῖον νὰ ὀρίσωμεν καὶ τὴν ἐναντίαν ὑπόθεσιν $H_1 : \mu_A - \mu_B \neq 0$.

ΣΦΑΛΜΑ Ι ΚΑΙ ΙΙ ΕΙΔΟΥΣ

Ἀπὸ κάποιον νέον, τὸν ὁποῖον τυχαίως συναντῶμεν, ζητοῦμεν νὰ ἀπαντήσῃ εἰς 32 ἐρωτήσεις Γεωγραφίας τῆς Ἀφρικῆς εἰς τὴν μορφήν multiple-choice. Ἐκάστη ἐρώτησις περιλαμβάνει 4 ἀπαντήσεις, ἐκ τῶν ὁποίων μία εἶναι ἡ ὀρθὴ καὶ ζητεῖται νὰ ὑπογραμμισθῇ αὕτη. Ὁ σκοπὸς τοῦ πειράματος εἶναι νὰ διαπιστωθῇ, ἐὰν τὸ τυχαῖον πρόσωπον τὸ ὁποῖον ἠρωτήθη εἶναι ἀτόχος γνώσεων Γεωγραφίας τῆς Ἀφρικῆς. Τὸ συγκεκριμένον πρόσωπον θεωρεῖται ὡς κατέχον μερικὰς τουλάχιστον γνώσεις, ἐὰν δώσῃ 15 ὀρθὰς ἀπαντήσεις. Καὶ ἐὰν ἀκόμη τὸ ἄτομον περὶ τοῦ ὁποίου ὁμιλοῦμεν δὲν ἔχῃ ἰδέα περὶ γεωγραφίας, ἔχει πιθανότητα $p = \frac{1}{4}$ ὑπογραμμίσεως τῆς ὀρθῆς ἀπαντήσεως. Κατόπιν τούτου ὀρίζομεν τὴν μηδενικὴν ὑπόθεσιν ὡς $H_0 : p = \frac{1}{4}$ καὶ τὴν ἐναντίαν αὐτῆς $H_1 : p \neq \frac{1}{4}$ ($p > \frac{1}{4}$).

Τοῦτο εἶναι δυνατόν νὰ μᾶς ὁδηγήσῃ εἰς δύο σφάλματα.

(1) Ἐὰν δὲν γνωρίζῃ καθόλου Γεωγραφίαν, εἶναι πιθανὸν νὰ δώσῃ εἰς τὴν τύχην 15 ἢ περισσοτέρας ὀρθὰς ἀπαντήσεις. Ἐκ τούτου ὁδηγούμεθα εἰς σφάλμα, ἀπορρίπτοντες τὴν μηδενικὴν ὑπόθεσιν H_0 , μολονότι ἰσχύει εἰς τὴν πραγματικότητά. Τοιοῦτον σφάλμα καλεῖται **σφάλμα Ι εἶδους** (type I error). Ὡστε ὑπάρχει σφάλμα Ι εἶδους, ὅταν ἀπορριφθῇ ἡ H_0 , μολονότι εἶναι ὀρθή.

(2) Ἐνα ἄλλο σφάλμα εἶναι δυνατόν νὰ ὑπάρξῃ, ὅταν δοθοῦν ὀλιγώτερα ἀπὸ 15 ὀρθαὶ ἀπαντήσεις, παρ' ὅλον ὅτι τὸ συγκεκριμένον ἄτομον ἔχει μερι-

κάς γνώσεις Γεωγραφίας τῆς Ἀφρικῆς. Εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν δεχόμεθα τὴν H_0 , μολονότι δὲν ἀληθεύει. Τοῦτο καλεῖται **σφάλμα II εἵδους** (type II error). "Όταν λοιπὸν δεχόμεθα τὴν μηδενικὴν ὑπόθεσιν, ἐνῶ αὕτη εἶναι ψευδής, τότε ἔχομεν σφάλμα II εἵδους.

Ἡ ἀπόφασίς μας νὰ δεχθῶμεν ἢ νὰ ἀπορρίψωμεν τὴν μηδενικὴν ὑπόθεσιν, στηρίζεται ἐπὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὁρθῶν ἀπαντήσεων, αἱ ὁποῖαι ἔχουν δοθῇ. Τὸ σύνολον ὅλων τῶν δυνατῶν περιπτώσεων τὸ χωρίζομεν εἰς δύο ὑποσύνολα. Τὸ ἓνα ἐξ αὐτῶν περιλαμβάνει ὅλας τὰς περιπτώσεις αἱ ὁποῖαι ἔδωσαν ὁρθὰς ἀπαντήσεις ἀπὸ 0 ἕως 14 καὶ τὸ ἕτερον ὑποσύνολον περιέχει τὰς ὁρθὰς ἀπαντήσεις μεταξὺ 15 καὶ 32 συμπεριλαμβανομένων. Δύναται νὰ λεχθῇ ἐπίσης ὅτι οἱ ἀριθμοὶ οἱ μικρότεροι τοῦ 14,5 περιέχονται εἰς τὸ ἓνα διάστημα καὶ οἱ μεγαλύτεροι τοῦ 14,5 ἕως τὸ 32 περιλαμβάνονται εἰς τὸ ἕτερον διάστημα.

"Όλαι αἱ δυνατὰι περιπτώσεις αἱ μεγαλύτεραι τοῦ 14,5 συνθέτουν τὴν **κρίσιμον περιοχὴν** (critical region) καὶ ὅλαι αἱ πιθαναὶ τιμαὶ αἱ μικρότεραι τοῦ 14,5 καθορίζουν τὴν **περιοχὴν ἀποδοχῆς** (acceptance region). Ὁ ἀριθμὸς 14,5, ὁ ὁποῖος εἶναι τὸ ὅριον τῶν δύο διαστημάτων, καλεῖται **κρίσιμος τιμὴ** (critical value).

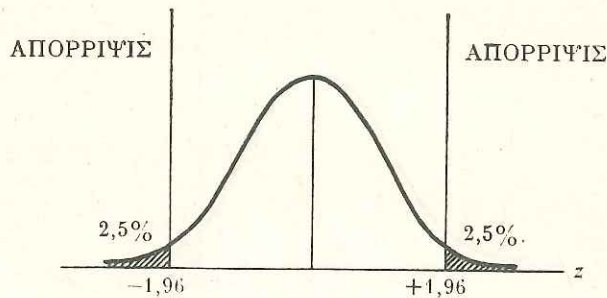
Ἐὰν ἡ χαρακτηριστικὴ τιμὴ, ἐπὶ τῆς ὁποίας θὰ στηριχθῇ ἡ ἀπόφασίς μας, εὐρεθῇ ἐντὸς τῆς κρίσιμου περιοχῆς, ἀπορρίπτομεν τὴν H_0 . Ἐὰν ἡ χαρακτηριστικὴ τιμὴ εὐρεθῇ εἰς τὴν περιοχὴν ἀποδοχῆς, δεχόμεθα τὴν H_0 ὡς ἰσχύουσαν. Τὸ μέγεθος τῆς κρίσιμου περιοχῆς καλεῖται **ἐπίπεδον σημαντικότητος** (level of significance).

ΑΜΦΙΠΛΕΥΡΟΣ - ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ

Μέχρι τώρα ἡ ἀπόρριψις τῆς H_0 εἶχεν ὡς ἀποτέλεσμα τὴν ἀποδοχὴν τῆς H_1 . Καμμία ἀναφορὰ δὲν ἐγένετο ὡς πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς διαφορᾶς.

"Εστω πρὸς ἔλεγχον ἡ $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$. Ἡ ἀποδοχὴ τῆς $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ ὡς συνέπεια τῆς ἀπορρίψεως τῆς H_0 , δηλοῖ μόνον διαφορὰν τῶν δύο μέσων. Ὁ ἔλεγχος τοῦτος λέγεται **ἀμφίπλευρος** (nondirectional, two-tailed test). "Ας φαντασθῶμεν 5% ἐπίπεδον σημαντικότητος (μέγεθος κρίσιμου περιοχῆς). Νοουμένου ὅτι ἡ κατανομὴ δειγματοληψίας εἶναι κανονική, τότε 2,5% τοῦ ἐμβαδοῦ κάτωθεν τῆς καμπύλης κεῖται εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου τῆς κατανομῆς καὶ πέραν τῶν 1,96 τυπικῶν ἀποκλίσεων καὶ 2,5% ἀριστερὰ τοῦ μέσου καὶ πέραν τῶν 1,96 τυπικῶν ἀποκλίσεων. (σχ. 31). Τὸ ἐμβαδὸν κάτωθεν τῆς καμπύλης, τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται ἐντὸς τῶν περιοχῶν «ἀπόρριψις» (κρίσιμαι περιοχαί), ἰσοῦται μὲ 5% τοῦ ὅλου ἐμβαδοῦ.

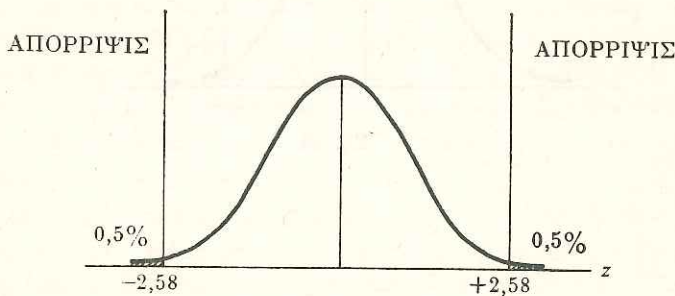
Δι' επίπεδον σημαντικότητος 1% τὸ μέγεθος τῆς περιοχῆς ἀποδοχῆς εὐρύνεται, ὥστε ἐκτὸς αὐτῆς νὰ κεῖται μόνον τὸ 1% τοῦ ὅλου ἐμβαδοῦ κάτωθεν



Σχ. 31

τῆς καμπύλης. Ἡ περιοχή ἀποδοχῆς ἐν προκειμένῳ κεῖται εἰς τὸ διάστημα $\pm 2,58$ τυπικαὶ ἀποκλίσεις (σχ. 32).

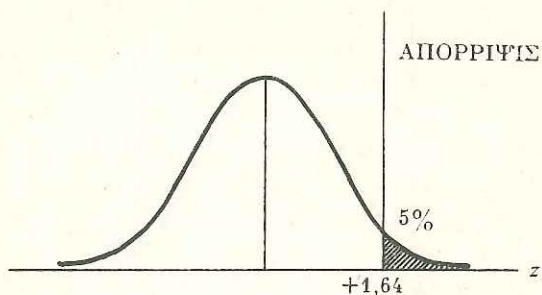
Ἐὰν ἐπιθυμῶμεν, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἀπόφασιν καὶ ὡς πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς διαφορᾶς. Εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν ἐλέγχομεν τὴν ὑπόθεσιν $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq 0$ ἐναντίον τῆς $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$ ἢ τὴν ὑπόθεσιν $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq 0$ ἐναντίον τῆς $H_2 : \mu_1 - \mu_2 < 0$. Οἱ ἐλέγχοι αὐτοῦ τοῦ εἴδους καλοῦνται **μονόπλευροι** (one-sided, one-tailed test).



Σχ. 32

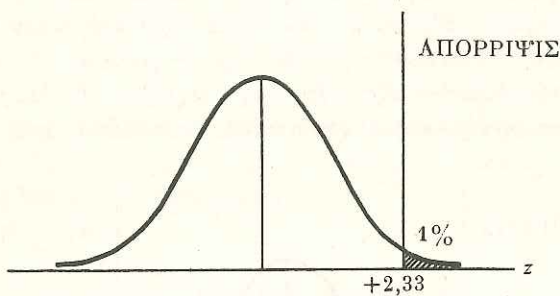
Διὰ τὴν ἀπόρριψιν τῆς $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq 0$, ἡ ὁποία συνεπάγεται τὴν ἀποδοχὴν τῆς $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$, μᾶς χρειάζεται τιμὴ $> +1,64$ διὰ ἐπίπεδον σημαντικότητος 5% (σχ. 33). Διὰ τὴν ἀπόρριψιν τῆς $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq 0$ καὶ τὴν ἀποδοχὴν τῆς $H_2 : \mu_1 - \mu_2 < 0$ χρειάζεται τιμὴ $< -1,64$. Ὁ ἀριθμὸς 1,64 εἶναι ἡ κρίσιμος τιμὴ, δεξιὰ τῆς ὁποίας κεῖται τὸ 5% τοῦ ἐμβαδοῦ κάτωθεν τῆς κανονικῆς καμπύλης. Συμμετρικῶς ἰσχύει καὶ διὰ τὴν κρίσιμον τιμὴν $-1,64$.

Διὰ ἐπίπεδον σημαντικότητος 1% καὶ διὰ μονόπλευρον ἔλεγχον, ἡ κρίσιμος τιμὴ ἰσοῦται μὲ + 2,33. Διὰ τὴν ἀπόρριψιν τῆς H_0 καὶ ἀποδοχὴν τῆς



Σχ. 33

H_1 , μᾶς χρειάζεται τιμὴ $> +2,33$ (σχ. 34) καὶ διὰ τὴν ἀπόρριψιν τῆς H_0 καὶ ἀποδοχὴν τῆς H_2 , εἶναι ἀναγκαῖον ἡ τιμὴ νὰ εἶναι $< -2,33$.



Σχ. 34

8. ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ

ΜΕΘΟΔΟΙ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ

Ὁ πληθυσμός, ὅπως ἔχομεν ἀναφέρει εἰς τὸ κεφ. 1, εἶναι μία ἔννοια ἣ ὁποία περιλαμβάνει ὅλας τὰς δυνατάς παρατηρήσεις ἢ μετρήσεις, αἱ ὁποῖαι ἔχουν σχέσιν μὲ ἓνα φαινόμενον. Τὸ δείγμα εἶναι ἡ ἔννοια ἣ ὁποία περιλαμβάνει ἓνα μέρος τοῦ πληθυσμοῦ. Ἡ μετάβασις ἐκ τοῦ δείγματος εἰς τὸν πληθυσμὸν ἀποτελεῖ τὸ περιεχόμενον τῆς στατιστικῆς συμπερασματολογίας ἢ τῆς **ἐπαγωγικῆς στατιστικῆς** (inductive statistics). Δὲν εἶναι εὐκόλον νὰ ἀναφερθῇ πότε καὶ ὑπὸ ποίας συνθήκας ἐπιτρέπονται αἱ δικαιολογημέναι γενικεύσεις. Αἱ μέθοδοι αἱ ὁποῖαι θὰ ἀναπτυχθοῦν προϋποθέτουν πάντοτε τὴν ὑπαρξιν τυχαίων, ἀνεξαρτήτων καὶ ἀντιπροσωπευτικῶν δειγμάτων.

Ἐνα δείγμα εἶναι τυχαῖον, ὅταν ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ πληθυσμοῦ ἔχουν τὴν αὐτὴν πιθανότητα νὰ περιληφθοῦν εἰς αὐτό.

Ὑπάρχουν διάφοροι τρόποι ἐκλογῆς ἐνὸς τυχαίου δείγματος.

(α) Θεωροῦμεν ἓνα πληθυσμὸν ἐκ 1000 ἀτόμων. Κάθε στοιχεῖον τοῦ πληθυσμοῦ τοποθετεῖται εἰς ὀρισμένην θέσιν, συμφώνως πρὸς κάποιαν διάταξιν (π.χ. ἀλφαβητικὴν). Δίδομεν εἰς ὅλα τὰ διατεταγμένα στοιχεῖα διαδοχικῶς ἓνα ἐκ τῶν ἀριθμῶν τοῦ διαστήματος [1-1000]. Μετὰ ἀπὸ αὐτὴν τὴν προεργασίαν καταφεύγομεν εἰς εἰδικούς πίνακας τυχαίων ἀριθμῶν (βλ. πίν. XV), οἱ ὁποῖοι μᾶς καθορίζουν ποῖα εἶναι τὰ 100 στοιχεῖα τὰ ὁποῖα θὰ περιληφθοῦν εἰς τὸ δείγμα.

(β) Μὲ βάσιν τὸν προηγούμενον κατάλογον τῶν 1000 ἀτόμων, τὰ ὁποῖα ἐτοποθετήθησαν κατ' ἀλφαβητικὴν σειρὰν ἢ ἄλλως πως, ἐκλέγομεν τὰ ἄτομα ἐκεῖνα τῶν ὁποίων οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἢ πολλαπλάσια τοῦ 10, (10, 20, 30, ...) ἢ πολλαπλάσια οἰουδήποτε ἄλλου ἀριθμοῦ ἢ οἱ λήγοντες εἰς 8 (8, 18, 28, ...) κ.λ.π. Τὸ εἶδος τοῦτο ἐκλογῆς τοῦ δείγματος καλεῖται **συστηματικὴ δειγματοληψία** (systematic sampling). Διὰ σκοποὺς ἐρεῦνης ἡ δειγματοληψία ἐκ τῶν τηλεφωνικῶν καταλόγων, εἰς τοὺς ὁποίους τὰ ὀνόματα εἶναι κατ' ἀλφαβητικὴν σειρὰν, πρέπει νὰ ἀποφεύγεται ὡς μεροληπτική. Διότι αἱ οἰκογένειαι αἱ ὁποῖαι δὲν περιλαμβάνονται εἰς τὸν τηλεφωνικὸν κατάλογον θὰ ἡδύναντο νὰ ἐπηρεάσουν τὸ ἀποτέλεσμα τῆς ἐρεῦνης.

(γ) Ἐπὶ χιλίων κλήρων γράφομεν τὰ στοιχεῖα τοῦ πληθυσμοῦ ἢ τοὺς διατακτικούς τῶν ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι ἀντιστοιχοῦν εἰς αὐτὰ τὰ στοιχεῖα καὶ τοπο-

θετούμεν τούς κλήρους εἰς μίαν κληρωτίδα. Ἡ ἐξαγωγή ἐκ τῆς κληρωτίδος 100 ἐξ αὐτῶν δύναται νὰ ἀποτελέσῃ τὸ δείγμα. Τὸ δείγμα δύναται νὰ εὑρεθῇ μὲ ἐπαναφορὰν ἢ χωρὶς ἐπαναφορὰν τῶν κλήρων εἰς τὴν κληρωτίδα. Ἐὰν μετὰ τὴν ἐξαγωγήν ἐνὸς κλήρου τοποθετηθῇ οὗτος κατὰ μέρος, μέχρις οὗτου εὖρωμεν καὶ τὸ ἑκατοστὸν στοιχεῖον τοῦ δείγματος, τότε ἡ **δειγματοληψία** εἶναι **ἀνευ ἀντικαταστάσεως** (sampling without replacement). Ἐὰν ὅμως εἰς ἐκάστην ἐξαγωγήν τοποθετῇται πάλιν ὁ κλήρος εἰς τὴν κληρωτίδα, τότε θὰ ἔχωμεν **δειγματοληψίαν μὲ ἀντικατάστασιν** (sampling with replacement). Γενικὴ ἀρχὴ διὰ τὴν ἐκλογὴν τοῦ ἐνὸς ἐκ τῶν δύο τρόπων εἶναι τὸ μέγεθος τοῦ πληθυσμοῦ. Ἐὰν ὁ πληθυσμὸς εἶναι μικρὸς ἢ ἐὰν τὸ δείγμα ἀντιπροσωπεύῃ ποσοστὸν 10% ἢ περισσότερον τοῦ πληθυσμοῦ, συνιστᾶται ὅπως ἡ εὗρεσις τοῦ δείγματος προέλθῃ ἐκ δειγματοληψίας χωρὶς ἀντικατάστασιν.

(δ) Ὁ τρόπος δειγματοληψίας ὁ ὁποῖος θὰ ἀναφερθῇ ἐδῶ, προϋποθέτει τὴν ἐκ τῶν προτέρων γνῶσιν τῆς ποσοστιαίας ἀναλογίας ἐκάστης τῶν κατηγοριῶν τοῦ πληθυσμοῦ. Ὁ τρόπος αὐτὸς καλεῖται **ἀναλογικὴ δειγματοληψία καθ' ὁμάδας** (proportional stratified sampling). Ὑποθέτομεν ὅτι εἰς τὸν πληθυσμὸν τῶν 1000 ἀτόμων ὑπάρχουν 600 ἄρρενες καὶ 400 θήλεις. Ἐκλεγόμεν μὲ ἓνα ἐκ τῶν τριῶν προαναφερθέντων τρόπων, 60 ἄρρενες καὶ 40 θήλεις διὰ τὴν δημιουργίαν δείγματος ἐξ 100 ἀτόμων.

Ὅταν ὁ πληθυσμὸς εἶναι δυνατόν νὰ διαιρεθῇ εἰς δύο ἢ περισσότερας ὁμοειδεῖς κατηγορίας, τὸ ἐξ αὐτοῦ δείγμα αὐξάνει τὴν πιθανότητα ὀρθοτέρας ἐκτιμῆσεως τῶν ιδιοτήτων τοῦ πληθυσμοῦ ἀπὸ τὸ δείγμα τὸ ὁποῖον δὲν ἔλαβε ὑπ' ὄψιν τὰς διαφόρους κατηγορίας τοῦ πληθυσμοῦ. Ἀσφαλῶς ὁ ἀκριβέστερος χωρισμὸς τῶν κατηγοριῶν προεξοφλεῖ καὶ τὴν καλυτέραν ἐκτίμησιν ἀπὸ οἰονδήποτε δείγμα τοῦ αὐτοῦ πλήθους.

Τὸ δείγμα, ἐκτὸς τοῦ ὅτι πρέπει νὰ εἶναι τυχαῖον, πρέπει νὰ εἶναι καὶ ἀντιπροσωπευτικόν, ὥς ἔχομεν ἀναφέρει καὶ προηγουμένως. Δὲν ὑπάρχει μονολιθικὸς κανὼν, ὁ ὁποῖος νὰ μᾶς λέγῃ ὅτι τὸ ποσοστὸν τῶν στοιχείων τοῦ δείγματος πρέπει νὰ εἶναι λ.χ. 10% τῶν στοιχείων τοῦ πληθυσμοῦ (πεπερασμένου). Μὲ τὴν ἀνωτέρω ἀναλογίαν, ἐὰν ἔχωμεν πληθυσμὸν ἐξ 100 στοιχείων, τὸ δείγμα θὰ ἔχῃ πληθικὸν ἀριθμὸν 10. Ἐὰν ὅμως ὁ πληθυσμὸς ἔχῃ 100.000 στοιχεῖα, τότε τὸ δείγμα ἀσφαλῶς δὲν μπορεῖ νὰ περιλαμβάνῃ 10.000. Ἡ ἐπεξεργασία τόσον πολλῶν στοιχείων τοῦ δείγματος θὰ εἶναι ἐπίπονη καὶ ἐν πολλοῖς περιττή.

Ὁ πῖναξ 40 μᾶς δίδει τὸ μέγεθος τοῦ δείγματος, τὸ ὁποῖον χρειάζεται, μὲ πιθανότητα σφάλματος μικροτέρου τοῦ 2% εἰς 99 δείγματα ἐκ τῶν 100.

Ὁ πῖναξ 41 μᾶς δίδει τὸ μέγεθος τοῦ δείγματος μὲ πιθανότητα σφάλματος μικροτέρου τοῦ 1% διὰ τὰ 997 δείγματα ἐκ τῶν 1000.

Ἀριθμὸς στοιχείων πληθυσμοῦ	Πληθικὸς ἀριθμὸς δείγματος	Ἑκατοστιαία ἀναλογία
200	110	55,0
500	190	38,0
1.000	260	26,0
2.000	320	16,0
5.000	380	7,6
10.000	420	4,2
20.000	440	2,2
50.000	450	0,9
100.000	500	0,5

Πίναξ 40

Ἀμφότεροι οἱ πίνακες μᾶς δίδουν τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων ἐκάστου δείγματος, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐκ τῆς χρησιμοποίησεως ἑνὸς ἐκ τῶν τρόπων α, β, γ, δ, τοὺς ὁποίους ἔχομεν ἀναφέρει.

Ἀριθμὸς στοιχείων πληθυσμοῦ	Πληθικὸς ἀριθμὸς δείγματος	Ἑκατοστιαία ἀναλογία
200	180	90,0
500	360	72,0
1.000	560	56,0
2.000	800	40,0
5.000	1.000	20,0
10.000	1.200	12,0
20.000	1.400	7,0
50.000	1.500	3,0
100.000	2.000	2,0

Πίναξ 41

Ἀσφαλῶς οἱ πληθικοὶ ἀριθμοὶ τῶν δειγμάτων δὲν πρέπει νὰ λαμβάνωνται τελεσιδίκως ὥς εἶναι εἰς τοὺς πίνακας. Δυνάμεθα νὰ αὐξήσωμεν τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων τῶν δειγμάτων εἰς ἀριθμοὺς πολλαπλασίους τοῦ 100· καὶ τοῦτο μόνον διὰ ὑπολογιστικῶν σκοποῦς.

ΣΦΑΛΜΑ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ

Διὰ σκοποὺς ἐρεῦνης ἐνδιαφερόμεθα διὰ τὴν μέσσην ἀπόδοσιν ὅλων τῶν μαθητῶν τῆς Κύπρου εἰς τὰ Ἀγγλικά. Ὡς γίνεται ἀντιληπτὸν, ἡ ὅλη ἐργασία εἶναι ἐπίπονος, λόγῳ τοῦ μεγάλου ἀριθμοῦ τῶν μαθητῶν. Ἀλλὰ, ἐὰν εἴχομεν τὸν χρόνον καὶ τὸ χρῆμα νὰ τὸ πράξωμεν, πάλιν δὲν θὰ ἐκερδίζαμεν οὐσιαστικὰ πράγματα, διότι εἰς τὸ αὐτὸ συμπέρασμα θὰ κατελήγαμεν μὲ μικρότερα δείγματα.

Διὰ νὰ γίνη τοῦτο κατανοητὸν θεωροῦμεν ὅτι ἔχομεν ἓνα πληθυσμὸν ἐκ 10 μαθητῶν, εἰς τοὺς ὁποίους ἔχουν δοθῇ οἱ βαθμοὶ

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19*.$$

Ὁ ἀριθμητικὸς μέσος τοῦ πληθυσμοῦ, τὸν ὁποῖον συμβολίζομεν μὲ μ , ἰσοῦται

$$\mu = \frac{1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19}{10} = \frac{100}{10} = 10$$

Ἐν προκειμένῳ δὲν ἔχει θέσιν ἡ στατιστικὴ συμπερασματολογία, διότι τὸ ἐξαγόμενον προέκυψεν ἐξ ὁλοκλήρου τοῦ πληθυσμοῦ.

Ἐὰν τώρα λάβωμεν δείγμα ἐκ 4 μαθητῶν, ποτὲ δὲν προσδοκῶμεν, μολονότι δὲν τὸ ἀποκλείομεν, ὅτι τὸ δείγμα θὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν ἀριθμητικὸν μέσον ὡς ὁ πληθυσμός. Θὰ κυμαίνεται πέριξ τοῦ 10, ὁ ὁποῖος εἶναι ὁ ἀριθμητικὸς μέσος τοῦ πληθυσμοῦ, καὶ θὰ εὐρίσκεται εἰς τὸ διάστημα [4-16]. Ὁ ἀριθμὸς 4 εἶναι ὁ ἀριθμητικὸς μέσος τῶν τεσσάρων μικροτέρων βαθμῶν 1, 3, 5 καὶ 7 καὶ ὁ ἀριθμὸς 16 εἶναι ὁ ἀριθμητικὸς μέσος τῶν τεσσάρων μεγαλυτέρων βαθμῶν.

Εἰς κάθε δείγμα θὰ ἀντιστοιχῇ ἓνας ἀριθμητικὸς μέσος $\bar{X}$. Ἡ διαφορὰ $\mu - \bar{X} = e$ καλεῖται **σφάλμα δειγματοληψίας** (sampling error).

Τοποθετοῦμεν εἰς κληρωτὶδα 10 κλήρους ἐπὶ τῶν ὁποίων εἶναι ἀναγεγραμμένοι οἱ δέκα βαθμοί. Ἄνευ ἀντικαταστάσεως καταγράφομεν τὰ 20 δείγματα τὰ ὁποῖα ἐπαρουσιάσθησαν** (πίν. 42).

Τὸ πρῶτον δείγμα δίδει $\bar{X}_1 = 9$. Ἡ τιμὴ αὕτη ὡς καὶ αἱ ὑπόλοιποι, θεωροῦνται ἐκτιμήσεις τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου τοῦ πληθυσμοῦ $\mu = 10$. Τὸ σφάλμα δειγματοληψίας διὰ τὸ πρῶτον δείγμα ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα. (πίν. 42, στήλη 4). Διὰ τὸ δεύτερον δείγμα τὸ σφάλμα δειγματοληψίας εἶναι $\mu - \bar{X}_2 = 10 - 14,5 = -4,5$ κ.ο.κ.. Συνήθως ἡ τιμὴ τοῦ μ μᾶς εἶναι ἄγνωστος καὶ ὡς ἐκ τούτου, ἀδυνατοῦμεν νὰ εὕρωμεν τὸ σφάλμα δειγματοληψίας. Πα-

* Οἱ βαθμοὶ ὅπως ἐλήφθησαν ἀπέβλεπον εἰς τὴν διευκόλυνσιν τῶν διαφορῶν ὑπολογισμῶν.

** Τὰ στοιχεῖα τῶν 20 δειγμάτων προέκυψαν κατόπιν πειράματος.

ρατηροῦμεν ὅμως ὅτι ὁ ἀριθμητικὸς μέσος ὅλων τῶν μέσων τῶν 20 δειγμάτων ἰσοῦται με $10,175 = \bar{X}_{\bar{X}} = \frac{\sum \bar{X}}{20}$, δηλ. ἡ τιμὴ αὐτὴ πολὺ ὀλίγον διαφέρει τῆς τιμῆς μ τοῦ πληθυσμοῦ. Ἀκόμη, ἐὰν ληφθῇ μεγαλύτερος ἀριθμὸς δειγμάτων καὶ εὗρωμεν τὸν ἀριθμητικὸν μέσον τῶν $\bar{X}$, θὰ ἀντιληφθῶμεν ἀμέσως ὅτι ἡ διαφορὰ τοῦ $\bar{X}_{\bar{X}}$ καὶ μ θὰ εἶναι ἀκόμη μικροτέρα.

Αἰξων ἀρ. δειγμάτων	Στοιχεῖα δειγμάτων	Ἀρ. μέσοι δειγμάτων	Σφάλμ. δειγματολ. $\mu - \bar{X} = e$
1	19, 11, 5, 1	9	1
2	15, 19, 11, 13	14,5	-4,5
3	11, 9, 17, 3	10	0
4	3, 5, 15, 7	7,5	2,5
5	17, 5, 1, 7	7,5	2,5
6	13, 9, 1, 15	9,5	0,5
7	3, 5, 13, 17	9,5	0,5
8	1, 3, 19, 17	10	0
9	13, 19, 5, 15	13	-3
10	19, 13, 11, 9	13	-3
11	1, 9, 15, 3	7	3
12	9, 17, 13, 11	12,5	-2,5
13	17, 11, 1, 5	8,5	1,5
14	13, 1, 5, 11	7,5	2,5
15	11, 7, 13, 3	8,5	1,5
16	17, 7, 15, 11	12,5	-2,5
17	3, 19, 5, 13	10	0
18	19, 11, 5, 13	12	-2
19	1, 9, 15, 19	11	-1
20	3, 13, 7, 19	10,5	-0,5
		$\sum \bar{X} = 203,5$	$\sum e = -3,5$
		$\bar{X}_{\bar{X}} = 10,175$	$\frac{\sum e}{20} = -0,175$

Πίναξ 42

ΚΑΤΑΝΟΜΑΙ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ

Μία ἀπὸ τὰς βασικὰς ἐννοίας τῆς στατιστικῆς συμπερασματολογίας εἶναι ἡ κατανομή δειγματοληψίας. Διὰ τὴν ἀποφυγὴν τοῦ ὀρίσμου, θεωροῦμεν τὸ πείραμα τῆς ἐξαγωγῆς 4 κλήρων ἐκ κληρωτίδος, ἡ ὁποία περιέχει τοὺς 10 βαθμοὺς, καὶ ἐπαναλαμβάνομεν τὴν κλήρωσιν, μέχρις ὅτου λάβωμεν ἓνα μεγάλον ἀριθμὸν δειγμάτων. Ἡ εὕρεσις τῶν ἀριθμητικῶν μέσων τῶν δειγμάτων καὶ ἡ γραφικὴ παράστασις των, θὰ μᾶς δώσῃ μίαν κατανομὴν μέσων, ἡ ὁποία καλεῖται **πειραματικὴ κατανομή δειγματοληψίας** (experimental sampling distribution).

Ἐὰν ἀντὶ τοῦ ἀνωτέρω πειράματος ληφθοῦν ὅλοι οἱ ἀριθμητικοὶ μέσοι τῶν συνδυασμῶν τῶν 10 βαθμῶν τῶν μαθητῶν, λαμβανόμενοι ἀνὰ 4, τότε θὰ προκύψῃ ἡ **θεωρητικὴ κατανομή δειγματοληψίας** (theoretical sampling distribution).

Διὰ νὰ εὕρωμεν εὐκολώτερον τὴν θεωρητικὴν κατανομὴν δειγματοληψίας, θεωροῦμεν ὅτι ἔχομεν τοὺς ἀριθμοὺς

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14.

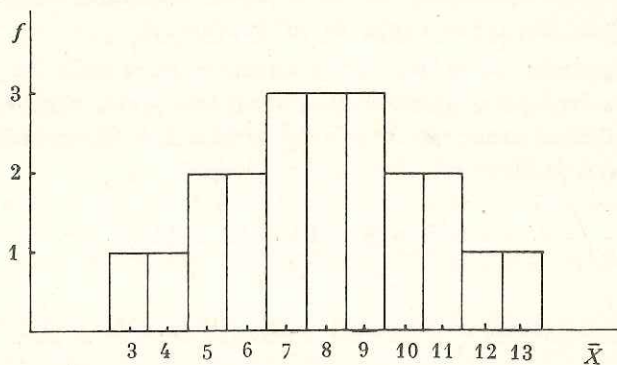
Ἡ λῆψις δύο ἐξ αὐτῶν, χωρὶς ἐπαναφορὰν τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ εἰς τὴν κληρωτίδα, θὰ μᾶς δώσῃ ἓνα ἐκ τῶν κάτωθι δυνατῶν δειγμάτων, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν τοὺς συνδυασμοὺς τῶν 7 ἀντικειμένων ἀνὰ 2 (πίν. 43, στήλαι 1, 3, 5).

Στοιχεῖα δειγμάτων	$\bar{X}$	Στοιχεῖα δειγμάτων	$\bar{X}$	Στοιχεῖα δειγμάτων	$\bar{X}$
2,4	3	4,8	6	6,14	10
2,6	4	4,10	7	8,10	9
2,8	5	4,12	8	8,12	10
2,10	6	4,14	9	8,14	11
2,12	7	6,8	7	10,12	11
2,14	8	6,10	8	10,14	12
4,6	5	6,12	9	12,14	13

Πίναξ 43

Οἱ ἀριθμητικοὶ μέσοι ὅλων τῶν δειγμάτων (στήλαι 2, 4, 6), μᾶς δίδουν τὸ ἱστόγραμμα τοῦ σχ. 35. Ἡ κατανομὴ αὕτη δηλοῖ ὅτι ἡ πιθανότης νὰ ἔχωμεν ἀριθμητικοὺς μέσους 3 ἢ 4 εἶναι $\frac{1}{21}$, ἀριθμητικοὺς μέσους 5 ἢ 6 $\frac{2}{21}$ κ.ο.κ.

Ἡ θεωρητικὴ κατανομὴ δειγματοληψίας συνήθως εἶναι κανονικὴ ἢ πε-
ρίπου κανονικὴ, ὅταν ὁ πληθικὸς ἀριθμὸς τῶν στοιχείων τοῦ δείγματος εἶναι
σχετικῶς μεγάλος καὶ τὰ στοιχεῖα τοῦ μὴ πεπερασμένου πληθυσμοῦ μᾶς
δίδουν κανονικὴν κατανομήν. Εἰς ὠρισμένας περιπτώσεις ὅμως τοῦτο δὲν



Σχ. 35

συμβαίνει· ὅπως π.χ. εἰς τὴν κατανομήν δειγμάτων τοῦ συντελεστοῦ συσχέ-
τισεως.

Οἱ ἀναφερθέντες πληθυσμοὶ τῶν δύο παραδειγμάτων ἦσαν πεπερασμένοι
καὶ μικροί. Εἰς τὴν πρᾶξιν ὅμως οἱ πλεῖστοι πληθυσμοὶ θεωροῦνται μὴ
πεπερασμένοι. Ἄν καὶ εἶναι πεπερασμένοι, τὸ μεγάλο πλῆθος τῶν στοιχείων
τῶν τοὺς ἐξισώνει μὲ πληθυσμοὺς ἀπείρων στοιχείων.

ΤΥΠΙΚΟΝ ΣΦΑΛΜΑ

Ἡ τυπικὴ ἀπόκλισις τῆς κατανομῆς δειγματοληψίας καλεῖται **τυπικὸν
σφάλμα** (standard error). Τὸ τυπικὸν σφάλμα εἶναι τὸ μέτρον τὸ ὁποῖον
περιγράφει τὴν διακύμανσιν εἰς τὰ ἐπαναλαμβανόμενα δείγματα ἐξ ἑνὸς πλη-
θυσμοῦ.

Τὸ τυπικὸν σφάλμα τῶν ἀριθμητικῶν μέσων εἶναι ἔννοια τῆς ὁποίας
ὁ ρόλος εἰς τὴν στατιστικὴν συμπερασματολογίαν εἶναι σπουδαιότατος, διότι
τὸ τυπικὸν σφάλμα μετρᾷ πόσον οἱ μέσοι ὅροι τῶν τυχαίων δειγμάτων δια-
φέρουν μεταξύ των. Τὰ τυχαῖα δείγματα δίδουν περισσότερον ἀντικειμενικὰς
πληροφορίας, ὅταν τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων τῶν δειγμάτων εἶναι μεγάλο,
διότι οἱ μέσοι ὅροι τῶν δειγμάτων θὰ εἶναι πλησιέστεροι πρὸς τὸν ἀριθμητικὸν
μέσον μ τοῦ πληθυσμοῦ, ὁ ὁποῖος εἶναι τὸ στοιχεῖον τὸ ὁποῖον θέλομεν νὰ
ἐκτιμήσωμεν.

Σκοπὸς μας βεβαίως δὲν εἶναι νὰ λαμβάνωμεν πολλὰ δείγματα μεγάλου
πλήθους καὶ μετὰ νὰ γενικεύωμεν τὰ συμπεράσματά μας ἐπὶ τοῦ πληθυσμοῦ.

τοῦτο θὰ γίνεται μόνον ἀπὸ ἓνα τυχαῖον καὶ ἀντιπροσωπευτικὸν δεῖγμα.

Ὁ ἀριθμητικὸς μέσος τῆς θεωρητικῆς κατανομῆς δειγματοληψίας συμβολίζεται μὲ $\mu_{\bar{x}}$ καὶ ἡ τυπικὴ ἀπόκλισις μὲ $\sigma_{\bar{x}}$. Αἱ τιμαὶ αὗται δὲν διαφέρουν σημαντικῶς ἀπὸ τὸν ἀριθμητικὸν μέσον $\bar{X}$ καὶ τὴν τυπικὴν ἀπόκλισιν $s_{\bar{x}}$ τῆς πειραματικῆς κατανομῆς δειγματοληψίας, ἰδιαίτερώς ὅταν ἕνας πολὺ μεγάλος ἀριθμὸς δειγμάτων ληφθῇ ἐκ τοῦ πληθυσμοῦ.

Ὁ ἀριθμητικὸς μέσος $\mu_{\bar{x}}$ τῆς θεωρητικῆς κατανομῆς δειγματοληψίας ἀποδεικνύεται ὅτι ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμητικὸν μέσον μ τοῦ πληθυσμοῦ. Πράγματι ὁ ἀριθμητικὸς μέσος τῶν $\bar{X}$ (πίν. 43, στῆλαι 2, 4, 6), ἰσοῦται μὲ $8 = \mu_{\bar{x}}$, ὡς ἐπίσης καὶ ὁ ἀριθμητικὸς μέσος τοῦ πληθυσμοῦ

$$\mu = \frac{2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14}{7} = 8$$

ἐκ τοῦ ὁποίου προῆλθεν ἡ θεωρητικὴ κατανομὴ δειγματοληψίας.

Ἡ τυπικὴ ἀπόκλισις τῆς θεωρητικῆς κατανομῆς δειγματοληψίας (τυπικὸν σφάλμα), ὅταν ὁ πληθυσμὸς εἶναι πεπερασμένος καὶ μικρὸς, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$8.1 \quad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{N_{\pi} - N}{N_{\pi} - 1}}$$

ὅπου σ = τυπικὴ ἀπόκλισις τοῦ πληθυσμοῦ

N_{π} = ἀριθμὸς στοιχείων τοῦ πληθυσμοῦ

N = πληθικὸς ἀριθμὸς δείγματος.

Ὅταν ὁ πληθυσμὸς εἶναι μὴ πεπερασμένος ἢ εἶναι πάρα πολὺ μεγάλος, ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ τυπικὸν σφάλμα δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$8.2 \quad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

καὶ ἐπὶ πλέον ἰσχύει $\mu_{\bar{x}} = \mu$.

Τὸ τυπικὸν σφάλμα τῶν μέσων διὰ μὴ πεπερασμένον πληθυσμὸν εἶναι ἀνάλογον τῆς τυπικῆς ἀποκλίσεως τοῦ πληθυσμοῦ καὶ ἀντιστρόφως ἀνάλογον τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ πλήθους τῶν στοιχείων τοῦ δείγματος. Ὅσον μεγαλυτέρα εἶναι ἡ ἔκτασις τῶν στοιχείων τοῦ πληθυσμοῦ, τόσον μεγαλυτέρα θὰ εἶναι ἡ τυπικὴ ἀπόκλισις καὶ κατὰ συνέπειαν μεγαλύτερον τὸ τυπικὸν σφάλμα καὶ ὅσον μεγαλύτερος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν στοιχείων τοῦ δείγματος, τόσον μικρότερον θὰ εἶναι τὸ τυπικὸν σφάλμα.

Υποθέτομεν ὅτι ἔχομεν δύο μὴ πεπερασμένους πληθυσμούς, τῶν ὁποίων οἱ ἀριθμητικοὶ μέσοι εἶναι ἴσοι $\mu_1 = \mu_2$. Λαμβάνομεν ἓνα τυχαῖον δείγμα πλῆθους N_1 ἐκ τοῦ πρώτου πληθυσμοῦ, τοῦ ὁποῦ οἱ ἀριθμητικὸς μέσος εἶναι $\bar{X}_1$, καὶ ἓνα ἄλλο δείγμα ἐκ τοῦ ἐτέρου πληθυσμοῦ, πλῆθους N_2 , τοῦ ὁποῦ οἱ ἀριθμητικὸς μέσος εἶναι $\bar{X}_2$.

Λαμβάνοντες τὰς διαφορὰς $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ πολλῶν ζευγῶν δειγμάτων, ἀνὰ ἓνα ἐξ ἐκάστου πληθυσμοῦ, θὰ προκύψῃ μία κατανομὴ δειγματοληψίας τῶν διαφορῶν τῶν μέσων μεταξὺ τῶν δειγμάτων. Τονίζεται ἐμφαντικῶς ὅτι τὰ δύο δείγματα εἶναι μεταξὺ τῶν ἀνεξάρτητα.

Ἐὰν $\sigma_{\bar{X}_1}^2 = \frac{\sigma_1^2}{N_1}$ εἶναι ἡ διασπορὰ τῆς κατανομῆς δειγματοληψίας τῶν μέσων διὰ τὸν ἓνα πληθυσμὸν καὶ $\sigma_{\bar{X}_2}^2 = \frac{\sigma_2^2}{N_2}$ εἶναι ἡ διασπορὰ τῆς κατανομῆς δειγματοληψίας τῶν μέσων τοῦ ἄλλου πληθυσμοῦ, τότε ἡ διασπορὰ τῆς κατανομῆς δειγματοληψίας τῶν διαφορῶν τῶν μέσων δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου,

$$8.3 \quad \sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}^2 = \sigma_{\bar{X}_1}^2 + \sigma_{\bar{X}_2}^2 = \frac{\sigma_1^2}{N_1} + \frac{\sigma_2^2}{N_2}$$

Ἐξ αὐτοῦ τοῦ τύπου μᾶς δίδεται τὸ τυπικὸν σφάλμα τῆς κατανομῆς δειγματοληψίας τῆς διαφορᾶς τῶν μέσων.

$$8.4 \quad \sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{N_1} + \frac{\sigma_2^2}{N_2}}$$

ΔΙΑΣΤΗΜΑ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ ΤΩΝ ΑΡ. ΜΕΣΩΝ (Μεγάλα δείγματα)

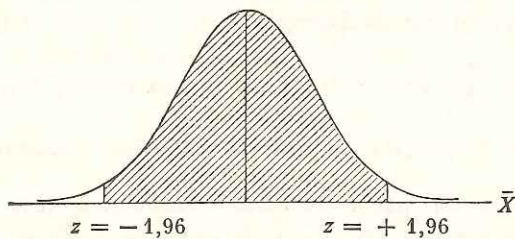
Υποθέτομεν ὅτι ἡ μέση ἐπίδοσις ἑνὸς τυχαίου δείγματος ἐκ $N = 100$ ἀτόμων εἰς τὴν Ἱστορίαν εἶναι $\bar{X} = 15$ καὶ ὅτι ἡ τυπικὴ ἀπόκλισις εἶναι $s = 1,2$. Ἡ ὑπολογισθεῖσα τιμὴ $\bar{X} = 15$, ἡ ὁποία προέκυψεν ἐκ τοῦ δείγματος δι' ἀπ' εὐθείας μετρήσεως, καλεῖται **σημειακὴ ἐκτίμησης** (point estimate). Ἡ ἔννοια αὕτη μᾶς δίδει μίαν ἐκτίμησην τῆς ἀντιστοίχου τιμῆς τοῦ πληθυσμοῦ. Ὅμως εἶναι παρακεκινδυνευμένον νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς 15 εἶναι καὶ ὁ ἀριθμητικὸς μέσος τοῦ πληθυσμοῦ ἐκ τοῦ ὁποῦ προῆλθε τὸ δείγμα. Ὡς ἐκ τούτου, πᾶν σημεῖον ἐκτιμῆσεως πρέπει νὰ συνοδεύεται ἀπὸ ἓνα διάστημα ἐντὸς τοῦ ὁποῦ θὰ εὑρίσκεται μὲ κάποιαν πιθανότητα τὸ ἀντίστοιχον στοιχεῖον τοῦ πληθυσμοῦ. Τὸ διάστημα τοῦτο καλεῖται **διάστημα ἐμπιστοσύνης** (confidence interval).

Τὸ σχῆμα 36 ἀντιπροσωπεύει τὴν θεωρητικὴν κατανομὴν δειγματοληψίας τοῦ $\bar{X}$ καὶ ἐπὶ πλέον γνωρίζομεν ὅτι μεταξὺ τοῦ $z = -1,96$ καὶ $z = 1,96$

κεῖται τὸ 95% τοῦ συνολικοῦ ἐμβαδοῦ, τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται κάτωθεν τῆς καμπύλης καὶ τοῦ ἄξονος τῶν $\bar{X}$.

Αἱ τιμαὶ τοῦ τυπικοῦ ποσοῦ

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} \quad \text{διὰ } N > 30 \text{ μᾶς δίδουν κανονικὴν κατανομήν.}$$



Σχ. 36

Κατόπιν τούτου δύναται νὰ λεχθῇ μὲ πιθανότητα 95% ὅτι ἡ ἀνισότης

$$8.5 \quad -1.96 \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}} \leq 1.96 \quad \text{ἀληθεύει.}$$

Ἐκ τῆς ἀνισότητος αὐτῆς, τὴν ὁποίαν μᾶς δίδει τὸ διάστημα ἐμπιστοσύνης τοῦ τυπικοῦ ποσοῦ z , δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ διάστημα ἐμπιστοσύνης τῶν ἀρχικῶν μετρήσεων.

Ἐκ τοῦ τύπου 8.5 λαμβάνομεν

$$8.6 \quad \bar{X} - 1.96\sigma_{\bar{X}} \leq \mu \leq \bar{X} + 1.96\sigma_{\bar{X}}$$

Διὰ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ διάστημα ἐμπιστοσύνης, εἶναι ἀπαραίτητον νὰ γνωρίζωμεν τὸ $\sigma_{\bar{X}}$ καὶ πρὸ αὐτοῦ τὴν τυπικὴν ἀπόκλισιν τοῦ πληθυσμοῦ $\left(\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)$ ἢ ὁποία εἶναι ἄγνωστος καὶ τὴν ὁποίαν συνήθως δὲν δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν.

Κατόπιν τούτου ἀντικαθιστῶμεν τὸ $\sigma_{\bar{X}}$ διὰ τοῦ $s_{\bar{X}}$ $\left(s_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{N}}\right)$ ὅπου s^2 εἶναι ἡ ἀμερόληπτος ἐκτίμησις τοῦ σ^2 .

Τοιοιτοτρόπως ὁ τύπος 8.6 μετατρέπεται εἰς τὸν

$$8.7 \quad \bar{X} - 1.96s_{\bar{X}} \leq \mu \leq \bar{X} + 1.96s_{\bar{X}} \quad \text{ἢ}$$

$$8.8 \quad \bar{X} - 1,96 \frac{s}{\sqrt{N}} \leq \mu \leq \bar{X} + 1,96 \frac{s}{\sqrt{N}}$$

Ἀσφαλῶς καὶ πάλιν δὲν εἴμεθα ἀπολύτως βέβαιοι ὅτι τὸ μ θὰ κεῖται ἐντὸς τοῦ ἀνωτέρου διαστήματος. Ἡ πιθανότης εἶναι 95%. Ἐὰν θέλωμεν νὰ ἀυξήσωμεν τὴν πιθανότητα εἰς 99%, τότε τὸ διάστημα ἐμπιστοσύνης γίνεται

$$8.9 \quad \bar{X} - 2,58 \frac{s}{\sqrt{N}} \leq \mu \leq \bar{X} + 2,58 \frac{s}{\sqrt{N}}$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὸν τύπον 8.8 τὰς τιμὰς

$$\bar{X} = 15$$

$$s = 1,2$$

$$N = 100 \text{ καὶ ἔχομεν}$$

$$15 - 1,96 \frac{1,2}{\sqrt{100}} \leq \mu \leq 15 + 1,96 \frac{1,2}{\sqrt{100}}$$

$$15 - 1,96 \cdot 0,12 \leq \mu \leq 15 + 1,96 \cdot 0,12$$

$$15 - 0,2352 \leq \mu \leq 15 + 0,2352 \quad \Rightarrow$$

$$14,7648 \leq \mu \leq 15,2352$$

Τὸ κατώτερον ὄριον τοῦ διαστήματος ἐμπιστοσύνης εἶναι 14,7648 καὶ τὸ ἀνώτερον 15,2352. Ἐντὸς αὐτοῦ τοῦ διαστήματος καὶ μὲ πιθανότητα 95% κεῖται ὁ ἀριθμητικὸς μέσος τοῦ πληθυσμοῦ μ .

ΔΙΑΣΤΗΜΑ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ ΤΩΝ ΑΡ. ΜΕΣΩΝ (Μικρὰ δείγματα)

Ἡ εὗρεσις τοῦ διαστήματος ἐμπιστοσύνης μὲ τὴν ὁποῖαν ἡσχολήθημεν, προϋπέθετεν ὅτι τὸ πλῆθος N τῶν στοιχείων τοῦ δείγματος ἦτο μεγαλύτερον τοῦ 30.

Ἐὰν δείγματα μέχρι 30 στοιχείων ληφθοῦν ἐξ ἑνὸς κανονικοῦ πληθυσμοῦ καὶ εὗρεθοῦν αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ t , αἱ ὁποῖαι δίδονται ἐκ τοῦ τύπου

$$8.10 \quad t = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{N}}}$$

εἰς τὸ ὁποῖον $\bar{X}$ καὶ s εἶναι ὁ ἀριθμητικὸς μέσος καὶ ἡ τυπικὴ ἀπόκλισις τοῦ τυχαίου δείγματος ἀριθμοῦ στοιχείων N , τὸ ὁποῖον ἐλήφθη ἐκ πληθυσμοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου μ καὶ τυπικῆς ἀποκλίσεως σ , θὰ μᾶς δοθῇ ἡ πειραματικὴ κατανομὴ δειγματοληψίας τοῦ t . Διὰ μικρὰς τιμὰς τοῦ N ἡ κατανομὴ δὲν εἶναι κανονικὴ,

ἀλλὰ συμμετρική καὶ λεπτόκυρτος. Θὰ εἶναι συμμετρική καὶ λεπτόκυρτος καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ἀκόμη τῆς θεωρητικῆς κατανομῆς δειγματοληψίας, ὅταν ὁ πληθικός ἀριθμὸς N τοῦ δείγματος εἶναι μικρὸς. Ὅταν τὸ N αὐξηθῇ, τότε καὶ ἡ κατανομή t θὰ πλησιάσῃ τὴν κανονικὴν.

Τὰ ὅρια τοῦ διαστήματος τῆς βάσεως τῆς κατανομῆς t , τὰ ὁποῖα περι- κλείουν τὸ 95% ἢ 99% τοῦ ὅλου ἔμβαδοῦ κάτωθεν τῆς καμπύλης, εἶναι συνάρτησις τοῦ ἀριθμοῦ τῶν βαθμῶν ἐλευθερίας. Οἱ βαθμοὶ ἐλευθερίας ἰσοῦνται μὲ $N - 1$, ὅπου N εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν στοιχείων τοῦ δείγματος.

Εἰς τὴν κανονικὴν κατανομὴν ὡς γνωστὸν τὰ 95% τοῦ ἔμβαδοῦ κάτωθεν τῆς καμπύλης, κεῖνται ἐντὸς τοῦ διαστήματος $\pm 1,96$ τυπικαὶ ἀποκλίσεις ἀπὸ τὸν ἀριθμητικὸν μέσον. Τὰ 99% τοῦ ἔμβαδοῦ εὐρίσκονται μεταξύ $-2,58$ καὶ $+2,58$ τυπικὰς ἀποκλίσεις ἀπὸ τὸν μέσον καὶ 1% ἐκτὸς αὐτῶν τῶν ὁρίων. Ὅταν οἱ βαθμοὶ ἐλευθερίας τείνουν εἰς πολὺ μεγάλας τιμὰς, ἡ κατανομή t τείνει νὰ γίνῃ κανονικὴ καὶ τὰ ὅρια τοῦ διαστήματος ἐντὸς τοῦ ὁποίου θὰ περιλαμβάνεται τὸ 95% τοῦ ἔμβαδοῦ θὰ τείνουν εἰς τὰ ὅρια $\pm 1,96$ τυπικὰς ἀποκλίσεις ἐκ τοῦ μέσου.

Τὸ διάστημα ἐμπιστοσύνης ἐντὸς τοῦ ὁποίου κεῖται τὸ μ , μὲ πιθανότητα 95% διὰ $N < 30$, εἶναι

$$\bar{X} - t_{0,025} \frac{s}{\sqrt{N}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{0,025} \frac{s}{\sqrt{N}}$$

Ἐὰν θέλωμεν νὰ αὐξήσωμεν τὴν πιθανότητα εἰς 99%, ὁ τύπος μετατρέπεται εἰς τὸν

$$\bar{X} - t_{0,005} \frac{s}{\sqrt{N}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{0,005} \frac{s}{\sqrt{N}}$$

Τὰς τιμὰς $t_{0,025}$ καὶ $t_{0,005}$ λαμβάνομεν ἐκ τοῦ πίνακος III. Οὕτω διὰ μόνοπλευρον ἔλεγχον καὶ

$$\text{διὰ } 5 \beta.ε \text{ τότε } t_{0,025} = 2,571$$

$$\text{διὰ } 5 \beta.ε \text{ τότε } t_{0,005} = 4,032$$

$$\text{διὰ } 11 \beta.ε \text{ τότε } t_{0,025} = 2,201 \quad \kappa.ο.κ.$$

9. ΣΥΣΧΕΤΙΣΙΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Εἰς διάφορα πειράματα συμβαίνει συχνάκις νὰ θέλωμεν νὰ γνωρίζωμεν τὴν ἔκτασιν συσχετισμοῦ δύο μεταβλητῶν. Ὑπάρχουν διάφοροι μέθοδοι μετρήσεως τοιούτων σχέσεων, αἱ ὁποῖαι ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὴν φύσιν τῶν μεταβλητῶν καὶ ἀπὸ τὸ εἶδος τῶν κατανομῶν. Μία μέθοδος, πολὺ διαδεδομένη, χρησιμοποιεῖται εἰς ἐκείνας τὰς περιπτώσεις εἰς τὰς ὁποίας αἱ δύο μεταβληταὶ εἶναι ἀπαριθμηταὶ καὶ κατανέμονται κανονικῶς. Πληρουμένων τῶν ἀνωτέρω συνθηκῶν, θεωρητικῶς ἡ ἀναφερθεῖσα μέθοδος εἶναι ἡ πλέον ἱκανοποιητικὴ καὶ ἡ πλέον χρήσιμος διὰ τὴν εὑρεσιν τῆς **συσχετίσεως** (correlation).

Θεωροῦμεν τὴν βαθμολογίαν ἑνὸς τμήματος εἰς τὰ Μαθηματικά καὶ εἰς τὰ Φυσικά. Ἐὰν ὁ πρῶτος μαθητὴς εἰς τὰ Μαθηματικά συμβῇ νὰ εἶναι καὶ πρῶτος εἰς τὰ Φυσικά, ὁ δεῦτερος εἰς τὰ Μαθηματικά τύχη πάλιν νὰ εἶναι καὶ δεῦτερος εἰς τὰ Φυσικά καὶ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ὁ τελευταῖος εἰς τὸ ἓνα μάθημα νὰ εἶναι καὶ τελευταῖος εἰς τὸ ἄλλο, τότε λέγομεν ὅτι ὑπάρχει **πλήρης θετικὴ συσχέτισις** μεταξὺ Μαθηματικῶν καὶ Φυσικῶν καὶ ἡ τιμὴ τοῦ **συντελεστοῦ συσχετίσεως** (coefficient of correlation), ὁ ὁποῖος συμβολίζεται μὲ r , ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα. Ἐὰν ὁμοίως συμβῇ ὁ πρῶτος εἰς τὰ Μαθηματικά νὰ εἶναι τελευταῖος εἰς τὰ Φυσικά καὶ μὲ τὸν αὐτὸν τρόπον καταλήξωμεν εἰς τὸν τελευταῖον μαθητὴν εἰς τὰ Μαθηματικά ὁ ὁποῖος θὰ εἶναι πρῶτος εἰς τὰ Φυσικά, τότε θὰ λέγωμεν ὅτι ὑπάρχει **πλήρης ἀρνητικὴ συσχέτισις** μεταξὺ τῶν δύο μαθημάτων καὶ ὁ συντελεστὴς συσχετίσεως r θὰ ἰσοῦται μὲ -1 . Ὅλοι αἱ ἄλλαι περιπτώσεις μᾶς δίδουν τιμὰς τοῦ συντελεστοῦ συσχετίσεως κυμαινομένας εἰς τὸ διάστημα $(-1, +1)$. Μεταξὺ τῆς πλήρους θετικῆς συσχετίσεως καὶ τῆς ἀρνητικῆς τοιαύτης ὑπάρχει ἀπεριόριστος ἀριθμὸς δυνατῶν τιμῶν.

Τέσσερεις διαφορετικαὶ περιπτώσεις παρουσιάζονται εἰς τὸ σχ. 37. Ἡ περίπτωσις (α) παρουσιάζει τὴν γραφικὴν παράστασιν μιᾶς ὑψηλῆς θετικῆς συσχετίσεως. Εἰς τὸ σχῆμα (β) ὑπάρχει μὲν θετικὴ συσχέτισις, ἀλλὰ ἡ τιμὴ τῆς εἶναι μικρά. Τὸ σχῆμα (γ) παρουσιάζει μίαν κατάστασιν κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἥττον τυχαίαν. Δὲν ὑπάρχει οἰαδήποτε σχέσις κατὰ τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ προγνώσωμεν τὸ X ἐκ τοῦ Y ἢ ἀντιστρόφως. Ἡ τελευταία μορφή (δ) μᾶς παρουσιάζει μίαν σχετικῶς μεγάλην ἀρνητικὴν συσχέτισιν.