

2. ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

ΠΙΝΑΚΕΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Τὰ στοιχεῖα τὰ ὁποῖα λαμβάνονται συνήθως ἀπὸ πειράματα εἶναι ἀριθμοί. Ὅταν ἐπεξεργαζώμεθα αὐτὸν τὸν ἀριθμὸν στοιχείων, ταξινομοῦμεν τὰς τιμὰς τῶν εἰς διαστήματα καὶ καταγράφομεν τὸν ἀριθμὸν τῶν περιπτώσεων αἱ ὁποῖαι ἀνήκουν εἰς κάθε τάξιν. Ὁ ἀριθμὸς τῶν διαφορῶν περιπτώσεων εἰς τὸ αὐτὸ διάστημα καλεῖται **συχνότης** (frequency) καὶ συμβολίζεται μὲ f . Ἡ ὁμαδοποίησις τῶν στοιχείων εἰς κάθε διάστημα καλεῖται **κατανομὴ συχνοτήτων** (frequency distribution). Τοιαύτη ταξινόμησις βοηθεῖ τὸν ἐρευνητὴν νὰ ἀντιληφθῇ τὴν σπουδαιότητα τῶν στοιχείων, νὰ ἐξαγάγῃ συμπεράσματα καὶ εἰς πολλὰς περιπτώσεις νὰ περιορίσῃ τὴν ἐργασίαν τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν τοὺς κάτωθι βαθμοὺς 80 μαθητῶν μὲ κλίμακα βαθμολογίας ἀπὸ τὸ 1 ἕως τὸ 100. Ὅπως ἔχουν δοθῇ οἱ βαθμοὶ δὲν

43,	64,	74,	85,	98,	37,	41,	40,	70,	71
71,	66,	67,	50,	53,	97,	92,	76,	77,	70
60,	63,	46,	51,	69,	78,	82,	68,	93,	94
80,	83,	56,	58,	46,	84,	83,	67,	68,	57
47,	52,	59,	63,	64,	72,	73,	74,	85,	89
81,	61,	58,	53,	48,	54,	49,	45,	57,	56
88,	65,	87,	76,	69,	68,	63,	67,	77,	65
78,	73,	79,	72,	73,	67,	68,	62,	77,	62

Πίναξ 1

εἶμεθα εἰς θέσιν νὰ ἀντιληφθῶμεν οὔτε πῶς κατανέμονται οὔτε τὴν σημασίαν ἐκάστου κεχωρισμένως ἐν σχέσει πρὸς ὅλους τοὺς ἄλλους.

Κατ' ἀρχὴν δυνάμεθα νὰ τοποθετήσωμεν τοὺς βαθμοὺς τῶν μαθητῶν διατακτικῶς, δηλ. πρῶτον τὸν ὑψηλότερον βαθμὸν, δεύτερον τὸν ἀμέσως μικρότερον ἢ ἴσον τοῦ κ.ο.κ. Ὁ τρόπος αὐτὸς παρουσιάσεως τῶν βαθμῶν

καλεῖται **διατακτική κατανομή** (rank distribution). Ὁ πίναξ 2 παρουσιάζει τὴν διατακτικὴν κατανομὴν τοῦ πίνακος 1.

98,	97,	94,	93,	92,	89,	88,	87,	85,	85
84,	83	83,	82,	81,	80,	79,	78,	78,	77
77,	77,	76,	76,	74,	74,	73,	73,	73,	72
72,	71,	71,	70,	70,	69,	69,	68,	68,	68
68,	67,	67,	67,	67,	66,	65,	65,	64,	64
63,	63,	63,	62,	62,	61,	60,	59,	58,	58
57,	57,	56,	56,	54,	63,	53,	52,	51,	50
49,	48,	47,	46,	46,	45,	43,	41,	40,	37

Πίναξ 2

Ὅπως ἔχουν γραφῇ τώρα οἱ βαθμοὶ εἰς τὸν πίνακα 2, παρατηροῦμεν ὅτι ὑπάρχουν μαθηταὶ οἱ ὅποιοι ἔλαβον τὴν αὐτὴν βαθμολογίαν. Ὁ πίναξ 2 ὅμως δὲν εἶναι ἀρκετὰ βοηθητικός, ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς τῶν διαφορῶν κατηγοριῶν εἶναι μεγάλος. Εἶναι πρακτικώτερον νὰ ἐλαττώσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν, τοποθετοῦντες βαθμοὺς εἰς διαστήματα τὰ ὅποια νὰ περικλείουν τρεῖς ἢ καὶ περισσοτέρας διαφορετικὰς τιμάς. Οὕτω, ἐὰν ἔχωμεν τὸ διάστημα 75-79, θὰ τοποθετήσωμεν ἐντὸς αὐτοῦ τοὺς βαθμοὺς 75, 76, 77, 78 καὶ 79.

Ὁ πίναξ 3 μᾶς δίδει τὴν κατανομὴν τῶν 80 μαθητῶν τοῦ πίνακος 2 εἰς διαστήματα ἐκ πέντε μονάδων.

Αἱ τέσσαρες πρῶται στήλαι τοῦ πίνακος 3 παρουσιάζουν 4 διαφορετικὰς μεθόδους παρουσιάσεως διαστημάτων. Ἀναλόγως τοῦ ἐὰν ἡ μεταβλητὴ μας εἶναι συνεχὴς ἢ ἀσυνεχὴς, ἐκλέγομεν τὴν στήλην ἢ ὅποια μᾶς διευκολύνει περισσότερον. Αἱ στήλαι αἱ ὅποια χρησιμοποιοῦνται περισσότερον εἶναι ἡ δευτέρα διὰ συνεχεῖς μεταβλητάς καὶ ἡ τρίτη διὰ ἀσυνεχεῖς μεταβλητάς. Ἡ πέμπτη καὶ ἡ ἕκτη στήλη παρουσιάζουν δύο διαφορετικὰ εἶδη καταγραφῶν τῶν 80 περιπτώσεών μας. Ἡ ἑβδόμη στήλη ἐκφράζει ἀριθμητικῶς ὅ,τι ἔχει γραφῇ εἰς τὴν πέμπτην καὶ ἕκτην στήλην. Ἡ στήλη αὕτη καλεῖται στήλη συχνότητων. Διὰ τὸν ἑλεγχον τῆς ὀρθότητος τῶν καταγραφῶν εἰς τὰς στήλας 5 ἢ 6 θὰ πρέπη νὰ διαπιστώσωμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν συχνότητων εἰς τὴν στήλην 7 θὰ μᾶς δώσῃ τὸν πληθικὸν ἀριθμὸν τοῦ ὑπὸ ἐξέτασιν συνόλου τῶν μαθητῶν. Εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν τὸν ἀριθμὸν 80.

Μαθηματικὰ σύμβολα πολλάκις μᾶς βοηθοῦν νὰ ἀντιληφθῶμεν καὶ νὰ διατυπώσωμεν καλύτερον μίαν πρότασιν. Οὕτω, τὸ σύμβολον $\Sigma f = N$, χρησιμοποιεῖται διὰ νὰ ἐκφράσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν συχνότητων.

Ὁ μέσος ὁρος τῶν ὁρίων ἑνὸς διαστήματος καλεῖται **μέσον** (mid-point)

τοῦ διαστήματος. Τὸ μέσον θεωρεῖται ἡ ἀντιπροσωπευτικὴ τιμὴ τοῦ διαστήματος καὶ δικαιολογεῖται μόνον, ὅταν ὑπάρχῃ μεγάλος ἀριθμὸς τιμῶν εἰς ἕκαστον διάστημα τάξεως.

Ἀκριβῆ ὅρια διαστημάτων		Ὅρια ὡς ἀκέραιοι ἀρ.		Καταγραφές		Συχνότης
35- 40-	34,5-39,49	35-39	35+			1
40- 45-	39,5-44,49	40-44	40+	□		3
45- 50-	44,5-49,49	45-49	45+	▣	++++	6
50- 55-	49,5-54,49	50-54	50+	▣	++++	6
55- 60-	54,5-59,49	55-59	55+	▣ L	++++	7
60- 65-	59,5-64,49	60-64	60+	▣ □	++++	9
65- 70-	64,5-69,49	65-69	65+	▣ ▣ □	++++ +++	13
70- 75-	69,5-74,49	70-74	70+	▣ ▣	++++ +++	11
75- 80-	74,5-79,49	75-79	75+	▣ □	++++	8
80- 85-	79,5-84,49	80-84	80+	▣	++++	6
85- 90-	84,5-89,49	85-89	85+	▣	++++	5
90- 95-	89,5-94,49	90-94	90+	□		3
95-100-	94,5-99,49	95-99	95+	L		2
				80	80	$N = \Sigma f = 80$

Πίναξ 3

Χρησιμοποιούμεν τὴν πρώτην στήλην διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ μέσον τοῦ διαστήματος 75-80-.

(α) Διὰ ἀσυνεχῆ μεταβλητὴν: Ἐπειδὴ ὑπάρχει εἰς τὸ 80- τὸ πλὴν, ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς δὲν περιέχεται εἰς τὸ διάστημα 75-80-. Τὸ διάστημα τοῦτο περιλαμβάνει τὰς τιμὰς 75, 76, 77, 78, 79 (τοῦτο ἐκφράζει ἡ στήλη 3) τῶν ὁποίων ὁ μέσος ὅρος τοῦ ἀνωτέρου καὶ κατωτέρου ὁρίου εἶναι $\frac{75 + 79}{2} = 77$.

Τὸ 77 εἶναι τὸ μέσον τοῦ διαστήματος, ἡ ἀντιπροσωπευτικὴ τιμὴ.

(β) Διὰ συνεχῆ μεταβλητὴν: Τὸ διάστημα 75-80- διὰ συνεχῆ μεταβλητὴν, μετατρέπεται εἰς τὸ διάστημα 74,5-79,499 .. (τὰ διαστήματα αὐτοῦ τοῦ εἴδους ὑπάρχουν εἰς τὴν στήλην 2). Αἱ τιμαὶ τοῦ διαστήματος 79,5-80,49 δὲν περιλαμβάνονται εἰς τὸ διάστημα 75-80-, διότι τὸ 80 τὸ ὁποῖον ἀντιπροσωπεύει τὰς τιμὰς τοῦ διαστήματος 79,5-80,49 δὲν περιέχεται εἰς αὐτό. Συνεπῶς ὁ μέσος ὅρος τῶν ὁρίων τοῦ διαστήματος εἶναι $\frac{74,5 + 79,5}{2} = 77$, ὡς καὶ προηγουμένως.

ΓΡΑΦΙΚΑΙ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Γραφική παράστασις ἢ διάγραμμα εἶναι μία γεωμετρικὴ παράστασις ἐνὸς συνόλου ἀριθμῶν.

Τὰ στατιστικὰ δεδομένα, τὰ ὅποια παριστῶμεν διὰ ἀριθμητικῶν πινάκων, παρουσιάζουν ὀρίσμενας δυσκολίας εἰς τὴν ἐρμηνείαν των, διότι συνήθως ἀπαιτεῖται μεγάλη προσπάθεια κατανόσεως τῆς ἀκριβοῦς σημασίας των. Διὰ τοῦτο, τὰ στατιστικὰ δεδομένα παρουσιάζονται ὄχι μόνον διὰ πινάκων, ἀλλὰ καὶ διὰ γραφικῶν παραστάσεων, ὥστε νὰ δυνάμεθα νὰ ἀντιληφθῶμεν εὐκολώτερον τὰ οὐσιώδη χαρακτηριστικὰ τῶν κατανομῶν συχνοτήτων. Δι' αὐτοῦ τοῦ τρόπου ἡ στατιστικὴ ἔρευνα καθίσταται περισσότερον φανερά, τὰ δὲ συμπεράσματα ἐξ αὐτῆς κατανοητά. Ἐπὶ πλέον ἡ ἐντύπωσις ἢ ὁποία δημιουργεῖται ἀπὸ μίαν γραφικὴν παράστασιν εἶναι ἐντονωτέρα καὶ μεγαλύτερας διαρκείας ἢ ἐκείνη τοῦ ἀριθμητικοῦ πίνακος.

A

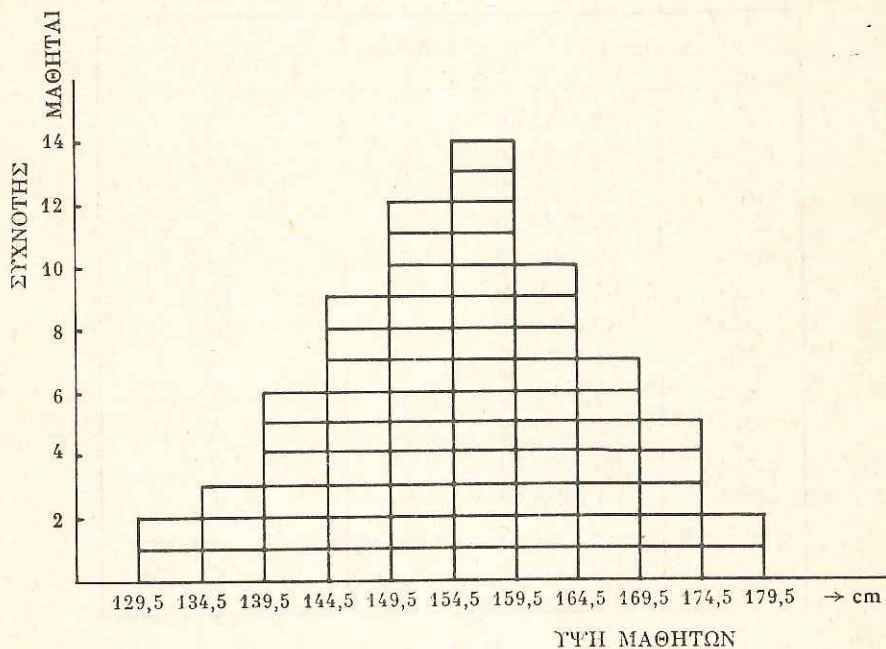
Διὰ νὰ παρουσιάσωμεν γραφικῶς τὴν κατανομὴν συχνοτήτων τοῦ ἀναστήματος 70 μαθητῶν (πίν. 4), λαμβάνομεν κατὰ μῆκος τοῦ ἄξονος τῶν

Διαστήματα	Μέσα	Καταγραφές	Συχνότης
129,5-134,5-	132		2
134,5-139,5-	137		3
139,5-144,5-	142	++++	6
144,5-149,5-	147	++++	9
149,5-154,5-	152	++++ +++++	12
154,5-159,5-	157	++++ +++++	14
159,5-164,5-	162	++++ +++++	10
164,5-169,5-	167	++++	7
169,5-174,5-	172	++++	5
174,5-179,5-	177		2
			$N = 70$

Πίναξ 4

τετμημένων (ὀριζόντιος ἄξων) μῆκη ἴσα πρὸς τὰ διαστήματα τάξεων, δηλ. πρὸς τὰ ἀναστήματα τῶν μαθητῶν (σχ. 1). Κατὰ μῆκος τοῦ ἄξονος τῶν τεταγμένων (κατακόρυφος ἄξων) λαμβάνομεν τμήματα ἴσα, τὰ ὅποια ἐκφράζουν τὰς συχνότητας τῆς κατανομῆς, τὴν ὁποίαν θέλομεν νὰ παραστήσωμεν γεωμετρικῶς. Ἐν προκειμένῳ τὸν ἀριθμὸν τῶν μαθητῶν.

Με βάσιν τὸ εὖρος τῶν ἀκριβῶν ὁρίων τῶν διαστημάτων τῶν τάξεων κατασκευάζομεν ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα, τῶν ὁποίων τὸ ὕψος ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀντίστοιχον συχνότητα ἐκάστης τάξεως, δηλ. πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν μαθητῶν τῶν περιλαμβανομένων εἰς ἕκαστον διάστημα. Εἰς τὸ διάστημα 129,5-134,5 ὑψώνομεν τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον μέχρι τὸ ὕψος 2, διότι δύο εἶναι οἱ μαθηταί, τῶν ὁποίων τὸ ἀνάστημα περιλαμβάνεται εἰς αὐτὸ τὸ διάστημα. Ὅμοίως κατασκευάζονται καὶ τὰ ἄλλα ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα. Ἡ γραφικὴ παράστασις αὐτοῦ τοῦ εἴδους καλεῖται **ιστόγραμμα** (histogram). Παρομοία παράστασις λαμβάνεται, ἐὰν τὴν στήλην 3 τοῦ πίνακος 4 τὴν περιστρέψωμεν κατὰ 90° .



Σχ. 1

Τὸ ἐμβαδὸν ὅλων τῶν ὀρθογωνίων παραλληλογράμμων τοῦ ιστογράμματος ἀντιπροσωπεύει τὸ ἄθροισμα τῶν συχνότητων εἰς τὴν κατανομήν, διότι ἡ βάσις ἐκάστου ὀρθογωνίου ἰσοῦται πρὸς ἓνα διάστημα καὶ τὸ ὕψος πρὸς τὴν ἀντίστοιχον συχνότητα, δηλ. πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν μαθητῶν τῶν περιλαμβανομένων εἰς ἕκαστον διάστημα.

Ἐκ τοῦ ιστογράμματος γίνεται ἀντιληπτὸν ὅτι αἱ περισσότεραι τῶν περιπτώσεων συσσωρεύονται περὶ τὸ μέσον τῆς κατανομῆς καὶ μόνον ὀλίγαι περιπτώσεις εὐρίσκονται εἰς ἀμφότερα τὰ ἅκρα. Τοῦτο ὅμως δὲν

συμβαίνει πάντοτε. Δέν είναι δύσκολον νά διαπιστώσωμεν επίσης ὅτι ὁ μέσος ὅρος τῶν ἀναστημάτων τῶν μαθητῶν κεῖται περίπου μεταξύ 154,5 καὶ 159,5 cm καὶ ὅτι μικρὸν ποσοστὸν μαθητῶν ἔχει ὕψος μικρότερον τῶν 139,5 cm καὶ μεγαλύτερον τῶν 169,5 cm.

Γενικῶς εἰς τὸ ἱστογράμμον συχνοτήτων δεχόμεθα ὅτι ὅλαι αἱ περιπτώσεις ἐντὸς τοῦ διαστήματος κατανέμονται κανονικῶς κατὰ μῆκος τοῦ εὗρους τῶν διαστημάτων.

B

Ὁ πίναξ 5 παρουσιάζει τὴν κατανομὴν 70 μαθητῶν εἰς γραπτὴν ἐξέτασιν.
Ἡ κλίμαξ βαθμολογίας εἶναι ἀπὸ τὸ 1 ἕως τὸ 100.

Διαστήματα		Μέσα	Συχνότης
40 +	39,5-44,49	42	2
45 +	44,5-49,49	47	3
50 +	49,5-54,49	52	5
55 +	54,5-59,49	57	8
60 +	59,5-64,49	62	9
65 +	64,5-69,49	67	13
70 +	69,5-74,49	72	10
75 +	74,5-79,49	77	8
80 +	79,5-84,49	82	5
85 +	84,5-89,49	87	4
90 +	89,5-94,49	92	2
95 +	94,5-99,49	97	1
			$\Sigma f = N = 70$

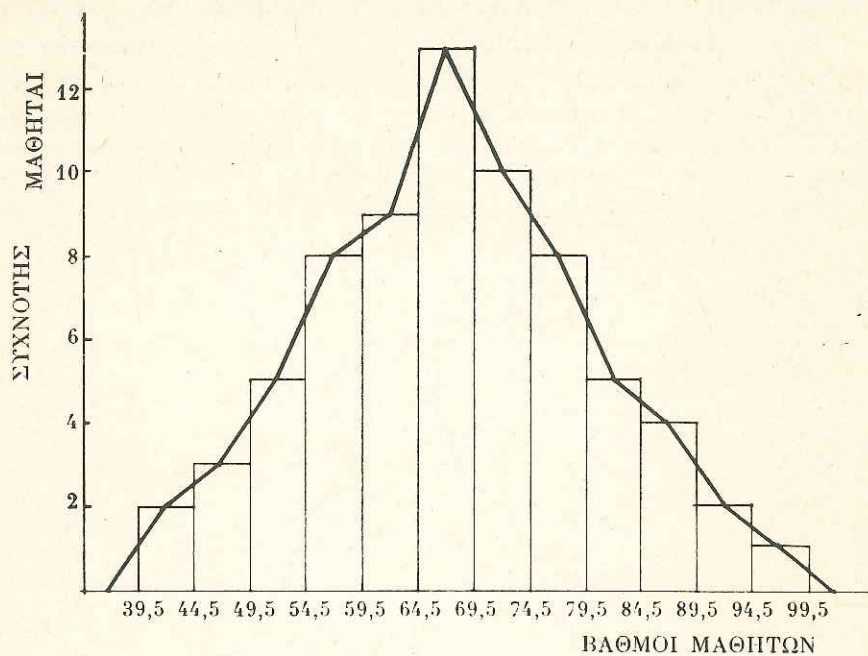
Πίναξ 5

Τὸ σχ. 2 παρουσιάζει τὴν γραφικὴν παράστασιν τῶν δεδομένων τοῦ πίνακος 5. Διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ ἱστογράμματος πάντοτε λαμβάνονται ὡς βάσεις τῶν ὀρθογωνίων παραλληλογράμμων τὰ ἀκριβῆ ὅρια τῶν διαστημάτων (στήλη 2, πίν. 5).

Ἐὰν τὰ μέσα τῶν ἄνω πλευρῶν τῶν ὀρθογωνίων παραλληλογράμμων τοῦ ἱστογράμματος (σχ. 2) ἐνωθοῦν διαδοχικῶς δι' εὐθυγράμμων τμημάτων, τὸ πολύγωνον τὸ ὁποῖον θὰ προκύψῃ ὀνομάζεται **πολύγωνον συχνοτήτων** (frequency polygon).

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἱστογράμματος θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου

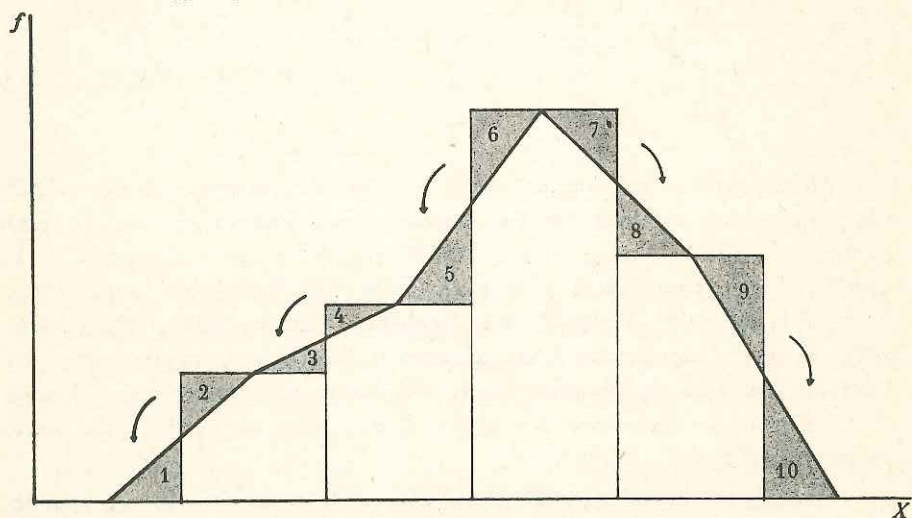
συχνοτήτων, εάν ενώσωμεν καὶ τὰ δύο ἄκρα τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς μετὰ τὰ μέσα τῶν δύο διαστημάτων, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἕνα προηγείται καὶ



Σχ. 2

τὸ ἕτερον ἔπεται τοῦ ἱστογράμματος.

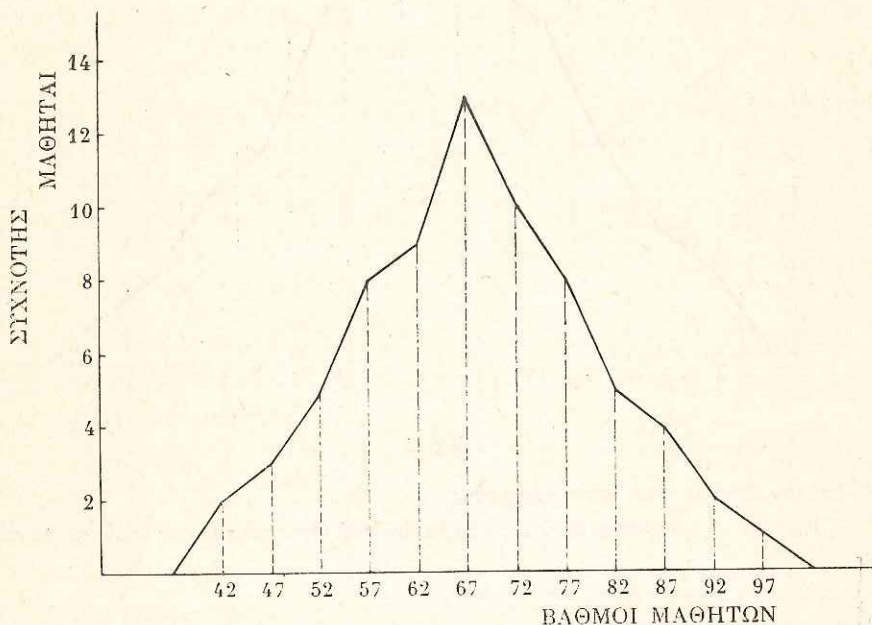
Ἐκ τοῦ σχ. 3 φαίνεται ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἱστογράμματος ἰσοῦται μετὰ τὸ



Σχ. 3

ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου συχνότητων. Πράγματι, ἐὰν τὰ τρίγωνα 2, 4, 6, 7 καὶ 9 περιστραφοῦν κατὰ γωνίαν 180° , θὰ συμπέσουν μετὰ τὰ τρίγωνα 1, 3, 5, 8 καὶ 10 ἀντιστοίχως, σημεῖον πρὸς σημεῖον. Τοῦτο ἀποδεικνύει τὰ λεχθέντα.

Τὸ πολύγωνον συχνότητων δύναται νὰ σχεδιασθῇ καὶ ἀνεξαρτήτως τοῦ ἱστογράμματος. Εἰς τὸ μέσον ἐκάστου διαστήματος (στήλη 3, πίν. 5) ὑψώνομε τὴν συχνότητα, ὡς φαίνεται εἰς τὸ σχ. 4. Ἐκ τῆς ἐνώσεως τῶν ἄνω ἁκρων τῶν συχνότητων διαδοχικῶς μᾶς δίδεται ἡ ζητούμενη γραφικὴ κατασκευή.



Σχ. 4

Τὸ πολύγωνον συχνότητων συνήθως εἶναι ἀκανονίστου μορφῆς. Ἐὰν αὐξήσωμεν ὅμως τὸ εὖρος τῶν διαστημάτων, εἶναι δυνατόν νὰ προκύψῃ ὁμαλωτέρα καμπύλη. Ὑπάρχει ὅμως καὶ ἄλλη μέθοδος πλέον εὔχρηστος. Ἡ μέθοδος αὕτη χρησιμοποιεῖ τοὺς μέσους ὅρους 3 διαδοχικῶν συχνότητων. Ὁ πίναξ 6 καὶ τὸ σχ. 5 ἐκφράζουν τὰ λεγόμενα. Διὰ τὴν χρῆσιν τῆς μεθόδου αὐτῆς πρέπει νὰ προεκταθῇ ἡ κλίμαξ κατὰ 6 διαστήματα, συχνότητος μηδὲν ἑκαστον, ἀνὰ τρία εἰς ἑκαστον ἄκρον. Ὁ λόγος ἐπεκτάσεως τῆς κλίμακος εἶναι ὅτι διὰ τὴν ἐξαγωγήν τῶν μέσων ὄρων πρέπει νὰ ληφθῇ τρεῖς φορές ἐκάστη συχνότης.

Οἱ ἀριθμοὶ τῆς τρίτης στήλης τοῦ πίνακος 6 προέκυψαν ἐκ τῆς προσθέ-

σεως ἐκάστοτε τριῶν διαδοχικῶν συχνότητων, ἦτοι

$$0 + 0 + 0 = 0$$

$$0 + 0 + 3 = 3$$

$$0 + 3 + 6 = 9$$

$$3 + 6 + 12 = 21 \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Ἡ τετάρτη στήλη τοῦ ἰδίου πίνακος περιλαμβάνει τὰ πηλίκα τῶν ἀριθμῶν τῆς στήλης τρία διὰ 3. Διὰ τὸν ἑλεγχον τῶν πράξεων θὰ πρέπη τὸ ἄθροισμα τῶν μέσων ὄρων τῆς στήλης 4 νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν συχνότητων τῆς στήλης 2.

X	f	Ἀθροισμα τριῶν διαδοχικῶν συχν.	Μέσοι ὄροι
20- 25-	0		
25- 30-	0	0	0
30- 35-	0	3	1
35- 40-	3	9	3
40- 45-	6	21	7
45- 50-	12	36	12
50- 55-	18	42	14
55- 60-	12	42	14
60- 65-	12	51	17
65- 70-	27	57	19
70- 75-	18	54	18
75- 80-	9	30	10
80- 85-	3	12	4
85- 90-	0	3	1
90- 95-	0	0	0
95-100-	0		
	$N = 120$		120

Πίναξ 6

Ἀναλόγως τῶν περιπτώσεων ἐνδέχεται τὸ ἱστογράμμου νὰ παρουσιάζῃ περισσότερα πλεονεκτήματα τοῦ πολυγώνου συχνότητων καὶ ἀντιστρόφως.

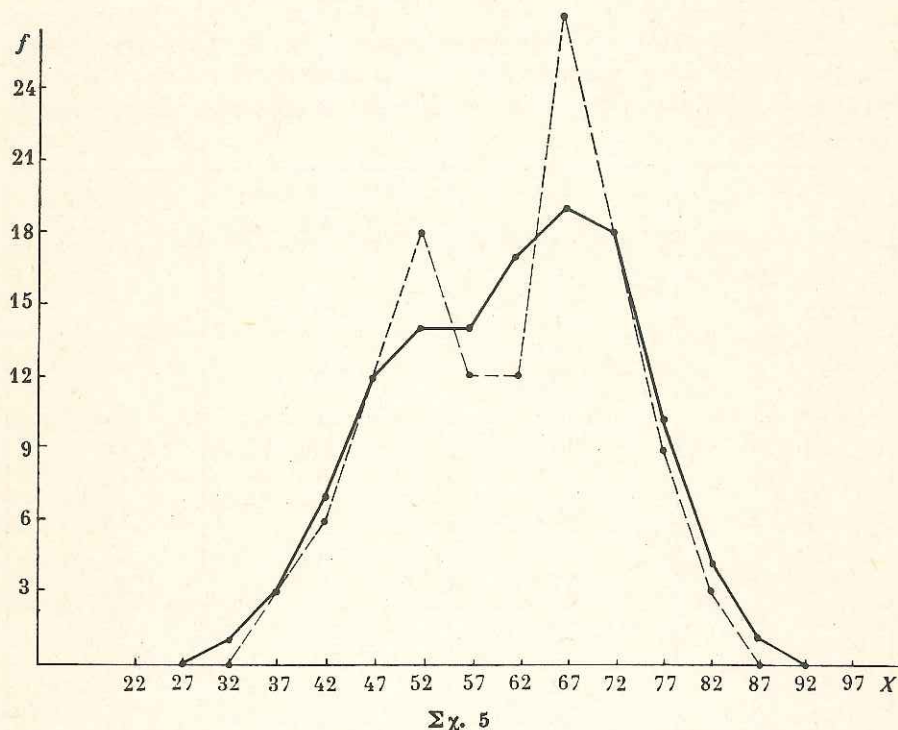
Τὸ πολύγωνον συχνότητων εἶναι προτιμώτερον τοῦ ἱστογράμματος, ὅταν δίδωνται δύο ἢ περισσότεραι κατανομαὶ πρὸς σύγκρισιν. Ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ τοποθετηθῇ ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης (σχ. 6).

Τὸ ἱστογράμμου προτιμᾶται ἀντὶ τοῦ πολυγώνου συχνότητων, ὅταν ἡ μεταβλητὴ δὲν δίδεται ἀριθμητικῶς, ὡς συμβαίνει εἰς τοὺς βαθμοὺς τῶν

ἀπολυτηρίων τῶν ἀποφοίτων τῆς στοιχειώδους ἐκπαιδεύσεως:

A , A^- , B^+ , B , B^- .

Εἶναι ἐπίσης ἰδιαιτέρως χρήσιμον, ὅταν ἔχωμεν μεγάλον ἀριθμὸν μετρήσεων. Τονίζεται διὰ μίαν ἀκόμη φοράν ὅτι ἐκάστη περίπτωσις εἰς τὸ ἱστόγραμμα ἀντιπροσωπεύεται μὲ ἴσον ἐμβαδόν.



Γ

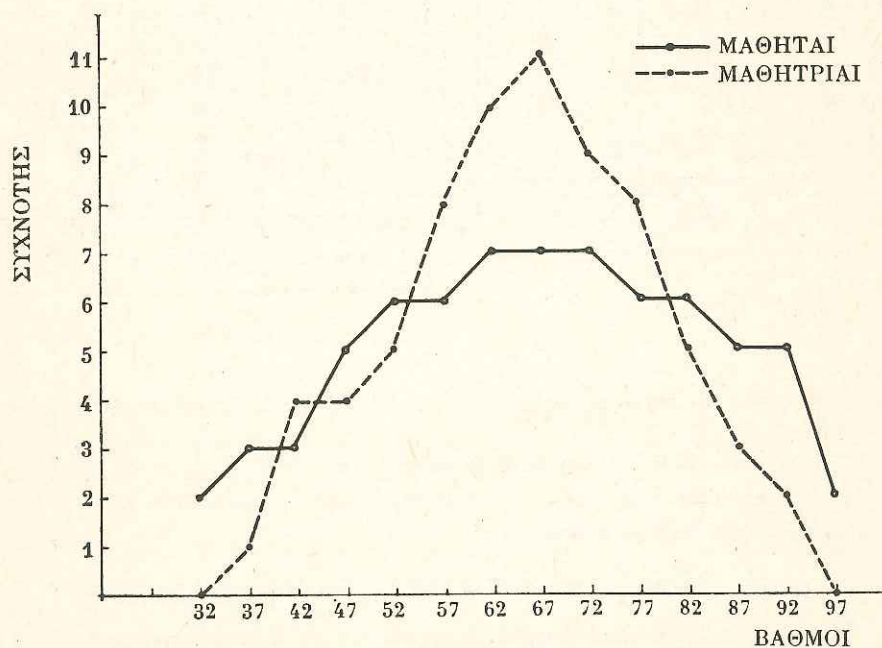
Ὁ πίναξ 7 μᾶς παρουσιάζει τὰ ἀποτελέσματα τῶν γραπτῶν ἐνιαίων ἐξετάσεων 70 μαθητῶν καὶ 70 μαθητριῶν εἰς τὰ Μαθηματικά.

Ἐκ τῶν δύο πολυγώνων συχνότητων τοῦ πίνακος 7 (σχ. 6) φαίνεται καθαρὰ ὅτι:

- (α) ἡ διασπορά τῶν μαθητῶν εἶναι μεγαλύτερα ἢ ἡ τῶν μαθητριῶν καὶ
- (β) ἡ πλειοψηφία τῶν μαθητριῶν ἔχει βαθμολογηθῇ μεταξὺ 57 καὶ 77. Οἱ λόγοι διὰ τοὺς ὁποίους αἱ μαθήτριαι δὲν ἔχουν λάβει βαθμοὺς εὐρισκομένους εἰς τὰ ἄκρα τῆς κλίμακος εἶναι ποικίλοι. Ἡ προετοιμασία, ἡ διδασκαλία, ἡ διαφορά φύλου, τὰ τεθέντα θέματα, εἶναι μερικοὶ ἐξ αὐτῶν. Ὁ ἐρευνητὴς εἶναι ἐκεῖνος ὁ ὁποῖος θὰ προσδιορίσῃ ἐπακριβῶς τοὺς λόγους, οἱ ὅποιοι ἐπηρέασαν θετικῶς ἢ ἀρνητικῶς τὰς δύο ομάδας εἰς τὴν ἀπόδοσίν των.

Διαστήματα	Μέσα	Συχνότητες	
		Μαθηταί	Μαθήτριαι
30-34	32	2	0
35-39	37	3	1
40-44	42	3	4
45-49	47	5	4
50-54	52	6	5
55-59	57	6	8
60-64	62	7	10
65-69	67	7	11
70-74	72	7	9
75-79	77	6	8
80-84	82	6	5
85-89	87	5	3
90-94	92	5	2
95-99	97	2	0
		$\Sigma f = 70$	$\Sigma f = 70$

Πίναξ 7



Σχ. 6

Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν μαθητῶν καὶ τῶν μαθητριῶν δὲν εἶναι ὁ αὐτός, τότε θὰ πρέπει νὰ μετατρέψωμεν τὸ πλῆθος τῆς μιᾶς ομάδος εἰς τὸ ἀντίστοιχον πλῆθος τῆς ἑτέρας ἢ νὰ μετατραποῦν ἀμφότεραι αἱ ομάδες, ὥστε νὰ ἔχουν πληθικὸν ἀριθμὸν τὸ 100. Εἶναι ἀναγκαῖον νὰ γίνη τοῦτο πρὸ τῆς συγκρίσεως, διότι τὸ πιθανώτερον εἶναι ὅτι ἡ ἀπ' εὐθείας σύγκρισις τῶν κατανομῶν μὲ διαφορετικὸν πλῆθος ἀτόμων εἰς ἐκάστην ομάδα, θὰ μᾶς δώσῃ ἀπατηλὰ συμπεράσματα.

Δ

Ἐὰν π.χ. μᾶς δοθοῦν πρὸς σύγκρισιν δύο ομάδες ἐξ 60 μαθητῶν (πίν. 8) καὶ 80 μαθητριῶν ἐκάστη (πίν. 9), θὰ πρέπει κάθε τιμὴ τοῦ πίνακος 8 νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $\frac{80}{60}$ ἢ κάθε τιμὴ τοῦ πίνακος 9 νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $\frac{60}{80}$, ὥστε νὰ γίνη ἐξίσωσις τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μαθητῶν εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις.*

Ἡ τρίτη στήλη τῶν πινάκων 8 καὶ 9 ἐκφράζει τὴν μετατροπὴν τῶν συχνοτήτων ἐκάστου ἐξ αὐτῶν εἰς τὴν συχνότητα τοῦ ἄλλου.

Διαστήματα	Συχνότης	Μετατραπεῖσαι συχνότη.
8-10-	3	4
10-12-	6	8
12-14-	12	16
14-16-	24	32
16-18-	9	12
18-20-	6	8
	60	80

Πίναξ 8

Διαστήματα	Συχνότης	Μετατραπεῖσαι συχνότη.
6- 8-	4	3
8-10-	8	6
10-12-	12	9
12-14-	24	18
14-16-	20	15
16-18-	8	6
18-20-	4	3
	80	60

Πίναξ 9

* Ἡ εὕρεσις τῶν λόγων $\frac{80}{60}$ καὶ $\frac{60}{80}$ ἔχει γίνῃ ἐκ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς ἀπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

Οἱ 60 μαθηταὶ τοῦ πίν. 8 ἀντιστοιχοῦν μὲ 80 μαθητρίαι τοῦ πίν. 9

οἱ 3 μαθηταὶ τοῦ πίν. 8 μὲ

X μαθητρίαι ἀντιστοιχοῦν τοῦ πίν. 9;

Τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, συνεπῶς

$$\frac{60}{3} = \frac{80}{X} \Rightarrow 60X = 3 \cdot 80 \Rightarrow X = \frac{80}{60} \cdot 3 = 4$$

Ὡστε οἱ 3 μαθηταὶ τοῦ πίνακος 8 ἀντιστοιχοῦν μὲ 4 μαθητρίαι τοῦ πίνακος 9.

Όταν τὸ εὖρος τῶν διαστημάτων εἰς μίαν κατανομήν γίνεται μικρότερον, καὶ κατὰ συνέπειαν ὁ ἀριθμὸς τῶν τάξεων αὐξάνεται καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν μετρήσεων ἢ παρατηρήσεων τείνει εἰς ἀπεριόριστον ἀριθμὸν, τότε τὸ ἱστόγραμμα καὶ τὸ πολύγωνον συχνότητων πλησιάζουν περισσότερον, ὥστε τὸ ὄριόν των νὰ καταλήξῃ τελικῶς εἰς μίαν κοινὴν καμπύλην. Αὕτῃ ἡ ὀρίκη καμπύλη καλεῖται **καμπύλη συχνότητων** (frequency curve). Ἡ καμπύλη συχνότητων εἶναι οὐσιωδῶς σπουδαία εἰς τὴν θεωρίαν τῆς στατιστικῆς. Ἡ σπουδαιότης της ἔγκειται εἰς τὸ γεγονὸς ὅτι τὸ ἐμβαδόν, τὸ ὁποῖον περικλείεται μεταξύ δύο οἰωνδήποτε τιμῶν, εἶναι ἀνάλογον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν παρατηρήσεων, αἱ ὁποῖαι εὐρίσκονται μεταξύ τῶν δύο αὐτῶν τιμῶν.

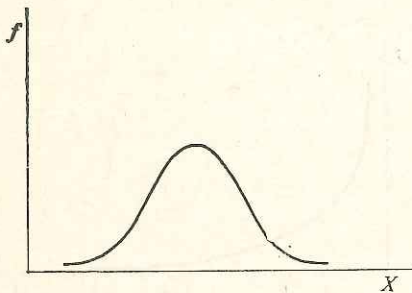
Ἡ ἐκλογή τῶν κλιμάκων εἰς τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων (ἄξων τετμημένων καὶ ἄξων τεταγμένων) εἶναι αὐθαίρετος. Μία γραφικὴ παράστασις ἐμφανίζεται αἰσθητικῶς ὥραία, ἐὰν τὸ ὕψος καὶ τὸ μῆκος της ἔχουν λόγον μεταξύ 3:5 καὶ 4:5.

ΕΙΔΗ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

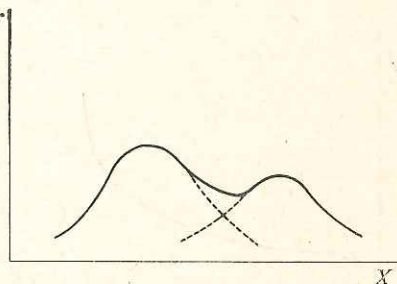
Πολλαὶ ἐκ τῶν κατανομῶν, αἱ ὁποῖαι λαμβάνονται ἀπὸ τὴν ἐκπαίδευσιν καὶ τὴν ψυχολογίαν, δὲν ἔχουν πάντοτε τὴν αὐτὴν μορφήν. Αἱ διαφοραὶ εἰς τὴν μορφήν των, αἱ ὁποῖαι θεωροῦμεν ὅτι προκύπτουν ἀπὸ σύνολα βαθμῶν, πιθανὸν νὰ εἶναι ἀποτέλεσμα τοῦ εὐκόλου ἢ δυσκόλου τῶν ἐρωτήσεων, τῆς αὐστηρότητος ἢ μὴ εἰς τὴν βαθμολογίαν, τῆς γνώσεως ἢ μὴ τῆς ἐξεταστέας ὕλης ὑπὸ τῶν ἐξεταζομένων, τῆς εὐφυΐας κ.λ.π.

Ἀναλόγως τῆς μορφῆς των αἱ κατανομαὶ λαμβάνουν καὶ ὀρισμένα ὀνόματα.

Τὸ σχ. 7 παριστᾷ μίαν **συμμετρικὴν** (symmetrical) κατανομήν. Ἡ συμμετρικὴ κατανομὴ ἔχει τὴν ἐξῆς ιδιότητα. Ἐκατέρωθεν τοῦ σημείου τοῦ ἄξονος τῶν X , τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν μεγαλύτεραν συχνότητα καὶ εἰς ἴσας ἀποστάσεις, ἀντιστοιχοῦν ἴσαι συχνότητες.



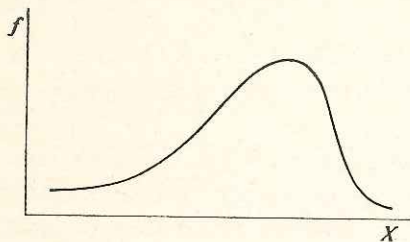
Σχ. 7



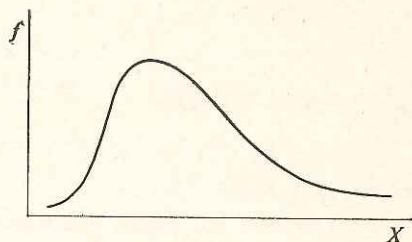
Σχ. 8

Τὸ σχ. 8 παριστᾷ μίαν κατανομήν, ἡ ὁποία προκύπτει ἐκ τῶν ἀποτελεσμάτων μιᾶς ἐξετάσεως, ἡ ὁποία ἐδόθη εἰς δύο ομάδας διαφορετικῶν ἱκανοτήτων. Εἶναι δυνατόν νὰ εὕρεθῇ αὕτη ἡ καμπύλη, ὅταν δοθῇ ἓνα test κοινὸν εἰς μαθητὰς θετικῆς καὶ κλασσικῆς κατευθύνσεως. Αἱ διακεκομμέναι γραμμαι μᾶς πληροφοροῦν ὅτι μερικοὶ ἐκ τῶν ἀρίστων τῆς μιᾶς ομάδος (κλασσικῆς κατευθύνσεως) ἔχουν γράψει καλύτερα ἀπὸ μερικοὺς ἐκ τῶν ἀδυνάτων τῆς ἄλλης ομάδος (θετικῆς κατευθύνσεως). Ἡ κατανομή αὕτη καλεῖται **δικορύφος** (bimodal).

Τὰ σχ. 9 καὶ 10 παριστοῦν καμπύλας, εἰς τὰς ὁποίας πέραν τοῦ $\frac{1}{2}$ τῶν περιπτώσεων κεῖνται εἴτε εἰς τὸ ἄκρον δεξιὰ (σχ. 9) εἴτε εἰς τὸ ἄκρον ἀριστερὰ (σχ. 10). Αὐτοῦ τοῦ εἴδους αἱ κατανομαὶ καλοῦνται **λοξαί**. Εἰδικώτερον ἡ κατανομή τοῦ σχ. 9 καλεῖται **ἀρνητικῶς λοξή** (negatively skewed) καὶ



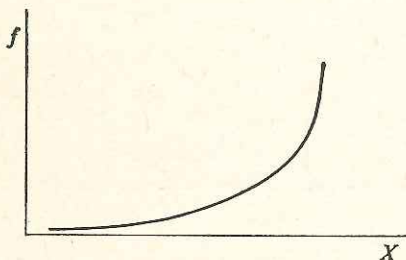
Σχ. 9



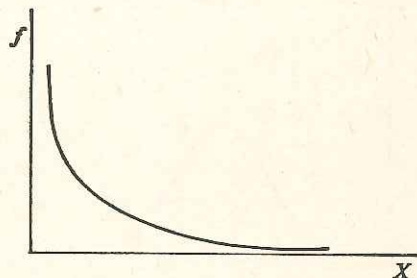
Σχ. 10

ἢ τοῦ σχ. 10 **θετικῶς λοξή** (positively skewed). Ἡ καμπύλη τοῦ σχ. 9 εἶναι δυνατόν νὰ ληφθῇ, ὅταν μεγάλος ἀριθμὸς ὑποψηφίων εἰς ἓνα test ἀπαντήσουν ὀρθῶς εἰς τὰς πλείστας τῶν ἐρωτήσεων. Τὸ ἀντίθετον συμβαίνει διὰ τοὺς ὑποψηφίους, τῶν ὁποίων οἱ βαθμοὶ τοὺς ἔδωσαν τὴν κατανομήν τοῦ σχ. 10.

Τὸ σχ. 11, τὸ ὁποῖον παριστᾷ μίαν καμπύλην ἡ ὁποία καλεῖται **κατανομή J** (J distribution), μᾶς πληροφορεῖ ὅτι ὀλίγοι ἐκ τῶν ὑποψηφίων ἔχουν πάρει πολὺ χαμηλοὺς βαθμοὺς καὶ ὁ μεγαλύτερος ἀριθμὸς αὐτῶν ἔχει πάρει ὑψηλοὺς βαθμοὺς. Ἡ κατανομή αὕτη πιθανόν νὰ εἶναι ἀποτέλεσμα τῆς πολὺ



Σχ. 11



Σχ. 12

καλῆς προετοιμασίας τῶν ὑποψηφίων ἢ τῆς μεγάλης εὐκολίας τῶν ἐρωτήσεων. Ἀντικειμενικὸς σκοπὸς αὐτῆς τῆς ἐξετάσεως εἶναι νὰ εὐρεθοῦν οἱ πλέον ἀδύνατοι ἐκ τῶν ἐξεταζομένων.

Εἰς τὸ σχ. 12 συμβαίνει τὸ ἀντίθετον. Ἡ κατανομὴ αὐτὴ μᾶς λέγει ὅτι πολὺ ὀλίγοι ὑποψήφιοι ἐπῆραν ὑψηλοὺς βαθμοὺς, ἐνῶ οἱ πλεῖστοι ἐξ αὐτῶν ἐπῆραν χαμηλοὺς βαθμοὺς. Ἡ μορφή τῆς καμπύλης πιθανὸν νὰ ὀφείλεται εἰς τὴν δυσκολίαν τῶν ἐρωτήσεων ἢ τὴν κακὴν προετοιμασίαν τῶν μαθητῶν ἢ τὴν μὴ συμπλήρωσιν τῆς ἐξεταστέας ὕλης ὑπὸ τοῦ διδάσκοντος. Ἡ καμπύλη αὐτὴ μᾶς δίδει τὴν δυνατότητα νὰ εὕρωμεν τοὺς πλέον ἀρίστους ἐκ τῶν ὑποψηφίων.

Γενικῶς ἡ εὕρεσις τῶν αἰτίων, τὰ ὁποῖα ἐπηρέασαν τὴν μορφήν τῆς κατανομῆς, εἶναι ἀποκλειστικὸν θέμα τοῦ ἐρευνητοῦ, ὁ ὁποῖος ἐκ τῆς μορφῆς τῆς καμπύλης θὰ ζητήσῃ νὰ εὕρῃ τοὺς παράγοντας, οἱ ὁποῖοι ἐπηρέασαν τὴν ἀπόδοσιν τοῦ ὑπὸ ἐξέτασιν συνόλου.