

κλειόμενα και τουλάχιστο
το πείραμα εκτελείται.

$$\frac{P(\Gamma|E)}{P(\Gamma|E) + P(\Gamma|A) + P(\Gamma|B)} = \frac{0,45 \times 0,03}{(0,20 \times 0,07) + (0,35 \times 0,05) + (0,45 \times 0,03)} = \frac{0,0135}{0,045} = 0,3$$

γεγονός και το συμπλη-
ρείται ολόκληρος ο δειγ-
κάθε γεγονός B ισχύει:

$$P(B|A_k)$$

και απλά $P(B)$. Δηλαδή:

$$(3.12)$$

σχετίζει τα $P(A_i|B)$ και
προτέρων πιθανότητα,
yes μπορούμε να βρού-

%, 35% και 45% της συ-
οιότητας βρέθηκε ότι το
ματικά. Υποθέστε ότι η
τυχαία και είναι ελαττω-
πό το μηχάνημα Γ;

να είναι ελαττωματική,
από το μηχάνημα Α, το
πό το μηχάνημα Β, το Γ
το μηχάνημα Γ, τότε:

Ασκήσεις

Λυμένες στο Κεφάλαιο 15

- Υποθέστε ότι έχουμε δύο γεγονότα Α και Β με $Pr(A)=0,6$ και $Pr(B)=0,7$ και $Pr(A \cap B)=0,3$. Βρείτε
 - Τις πιθανότητες $Pr(A|B)$ και $Pr(B|A)$
 - Είναι τα γεγονότα Α και Β ανεξάρτητα; Αιτιολογήστε.
- Υποθέστε ότι δύο γεγονότα Α και Β είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα και ότι $Pr(A)=0,40$ και $Pr(B)=0,50$. Βρείτε
 - Την πιθανότητα $Pr(A \cap B)$.
 - Την πιθανότητα $Pr(A|B)$.
 - Τα αμοιβαίως αποκλειόμενα γεγονότα είναι ίδια με τα ανεξάρτητα γεγονότα και αν τα γεγονότα είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα πρέπει να είναι και ανεξάρτητα. Συμφωνείτε; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. Τι συμβαίνει στη συγκεκριμένη άσκηση;
- Οι εκ των προτέρων πιθανότητες για τα γεγονότα Α και Β είναι $Pr(A)=0,30$ και $Pr(B)=0,70$. Έστω ότι γνωρίζουμε $Pr(A \cap B)=0$. Υποθέστε ότι $Pr(\Gamma|A)=0,20$ και $Pr(\Gamma|B)=0,09$.
 - Είναι τα γεγονότα Α και Β αμοιβαίως αποκλειόμενα; Αιτιολογήστε.
 - Υπολογίστε τις πιθανότητες $P(A \cap \Gamma)$ και $P(B \cap \Gamma)$.
 - Υπολογίστε την πιθανότητα $P(\Gamma)$.
 - Εφαρμόστε το θεώρημα Bayes για να υπολογίσετε τις πιθανότητες $Pr(A|\Gamma)$ και $Pr(B|\Gamma)$.
- Δύο αεροπορικές εταιρείες πραγματοποιούν την πτήση Αθήνα-Μυτιλήνη κάθε πρωί την ίδια ώρα. Αν E_1 το γεγονός ότι η πτήση της πρώτης εταιρείας είναι πλήρης και E_2 το γεγονός ότι η πτήση της δεύτερης εταιρείας είναι πλήρης και αν $Pr(E_1)=0,8$, $Pr(E_2)=0,7$ και $Pr(E_1 \text{ και } E_2)=0,65$ τότε:

- i. Υπολογίστε την πιθανότητα ότι η πτήση της πρώτης εταιρείας είναι πλήρης δοθείσης της πληρότητας της πτήσης της δεύτερης εταιρείας. Δηλαδή υπολογίστε την πιθανότητα $\Pr(E_1|E_2)$.
 - ii. Ομοίως υπολογίστε την πιθανότητα $\Pr(E_2|E_1)$.
 - iii. Είναι τα γεγονότα E_1 και E_2 ανεξάρτητα και γιατί;
5. Μια πετρελαιοκίνητη μηχανή παρουσιάζει αυξομείωση στροφών πέρα των κανονικών προδιαγραφών. Ας υποθέσουμε ότι 70% αυτών των αυξομειώσεων οφείλεται στο ρυθμιστή στροφών και 20% στην αντλία πετρελαίου. Ας ορίσουμε ως E_1 το γεγονός ότι η επόμενη αυξομείωση στροφών οφείλεται στο ρυθμιστή στροφών και E_2 το γεγονός ότι οφείλεται στην αντλία πετρελαίου. Υπολογίστε τις πιθανότητες:
 - i. $\Pr(\text{όχι } E_1)$.
 - ii. $\Pr(E_1 \text{ ή } E_2)$.
 - iii. $\Pr(\text{όχι } E_1 \text{ και όχι } E_2)$.
6. Σε μια παραγωγική διαδικασία παρασκευής 6.000 κουτιών τα 50 από αυτά είναι ελαττωματικά. Τρία κουτιά επιλέγονται τυχαία χωρίς επανατοποθέτηση. Αν E_1 και E_2 τα αντίστοιχα γεγονότα ότι το πρώτο ή το δεύτερο κουτί που επιλέγεται είναι ελαττωματικό βρείτε:
 - i. Είναι τα γεγονότα E_1 και E_2 ανεξάρτητα;
 - ii. Αν όχι E_1 είναι το γεγονός ότι το πρώτο κουτί που επιλέγεται δεν είναι ελαττωματικό ποια η πιθανότητα $\Pr(\text{όχι } E_1)$;
 - iii. Βρείτε επίσης τις πιθανότητες $\Pr(E_2|E_1)$ και $\Pr(E_2|\text{όχι } E_1)$.
7. Σε μια διασταύρωση τα αυτοκίνητα μπορούν να συνεχίσουν ευθεία (E_1), να στρίψουν δεξιά (E_2) ή να στρίψουν αριστερά (E_3). Αν για ένα τυχαία επιλεγμένο αυτοκίνητο $\Pr(E_1)=0,6$, $\Pr(E_2)=0,3$ και $\Pr(E_3)=0,1$ και υποθέτοντας ότι για τα αυτοκίνητα που κινούνται στη διασταύρωση αυτή τα γεγονότα είναι ανεξάρτητα, βρείτε
 - i. Σε τρία τυχαία επιλεγμένα αυτοκίνητα ποια η πιθανότητα να στρίψουν αριστερά;
 - ii. Ποια η πιθανότητα τα τρία τυχαία επιλεγμένα αυτοκίνητα να ακολουθήσουν την ίδια κατεύθυνση;

8. Ένα κουτί περιέχει 6 πράσινες και 4 μπλε μπάλες, ενώ ένα άλλο κουτί περιέχει 7 πράσινες και 3 μπλε μπάλες. Μια μπάλα επιλέγεται τυχαία από το πρώτο κουτί και τοποθετείται στο δεύτερο κουτί. Κατόπιν μια μπάλα επιλέγεται τυχαία από το δεύτερο κουτί και επανατοποθετείται στο πρώτο. Βρείτε:
- Ποια η πιθανότητα ότι μια πράσινη μπάλα επιλέχθηκε τυχαία από το πρώτο κουτί και μια πράσινη μπάλα επιλέχθηκε από το δεύτερο κουτί;
 - Ποια η πιθανότητα ότι ο αριθμός των πράσινων και μπλε μπαλών στο πρώτο κουτί είναι ίδιοι με τους αριθμούς στην αρχή;

Προς επίλυση

9. Ποια είναι η πιθανότητα να εμφανιστούν:
- Δύο 'εξάρια' σε δύο ρίψεις ενός ζαριού;
 - Ένα 'έξι' σε κάθε ζάρι από την ρίψη δύο ζαριών ταυτόχρονα;
 - Τρία κορίτσια σε μια οικογένεια με πέντε παιδιά;
10. Αν καταγράψουμε τα αποτελέσματα της ρίψης δύο ζαριών, ποιος είναι ο δειγματοχώρος των πιθανών αποτελεσμάτων από τις ρίψεις αυτές;
11. Αν $\Pr(A)=0.4$, $\Pr(B)=0.3$ και $\Pr(A \text{ ή } B)=0.6$, υπολογίστε τις πιθανότητες

$$\Pr(A \text{ και } B) \quad \Pr(A|B) \quad \text{και} \quad \Pr(B|A).$$

12. Ποια είναι η πιθανότητα να τραβήξουμε μία ντάμα ή ένα φύλλο καρό σε ένα απλό τράβηγμα κάρτας από ένα πακέτο των 52 καρτών; Ποια η πιθανότητα να τραβήξουμε μια ντάμα καρό;
13. Μία τάξη Στατιστικής αποτελείται από φοιτητές που είναι επιμελείς και εργατικοί (K), μέτριοι (M) και αδύνατοι (A). Ο καθηγητής της τάξης εκτιμά ότι 15% είναι οι καλοί και 50% είναι μέτριοι φοιτητές. Επίσης εκτιμά ότι ένας καλός φοιτητής έχει 80% πιθανότητα να περάσει το μάθημα στις εξετάσεις, ένας μέτριος φοιτητής έχει 50% και ένας αδύνατος έχει 20%. Ποια αναλογία της τάξης θα περάσει το μάθημα στις εξετάσεις; Δεδομένου ότι ένας φοιτητής έχει περάσει τις εξετάσεις, ποια είναι η πιθανότητα ότι ο φοιτητής αυτός είναι από τους επιμελείς και εργατικούς;

14. Ρίχνουμε ένα ζάρι 4 φορές. Ποια η πιθανότητα να εμφανιστεί ο αριθμός 3:
- και στις 4 δοκιμές,
 - σε καμμία απο τις 4 δοκιμές και
 - σε μια τουλάχιστον απο τις 4 δοκιμές;
15. Σε μια πόλη εκδίδονται τρία τοπικά περιοδικά A, B, και Γ. Αν από τους κατοίκους της πόλης το 30% διαβάζει το περιοδικό A, το 20% το B, το 15% το Γ, το 17% τα A και B, το 12% τα A και Γ, το 8% τα B και Γ και τέλος το 5% και τα τρία περιοδικά, υπολογίστε το ποσοστό των κατοίκων της πόλης αυτής που διαβάζει τουλάχιστον ένα περιοδικό από αυτά τα τρία. Ποιο είναι το ποσοστό εκείνων που δεν διαβάζουν κανένα περιοδικό;
- [Συμβουλή: Χρησιμοποιήστε τον κανόνα πρόσθεσης μη αμοιβαίως αποκλειόμενων γεγονότων. Καθώς έχουμε περισσότερα από δύο ενδεχόμενα ο τύπος γίνεται $\Pr(A \cup B \cup \Gamma) = \Pr(A) + \Pr(B) + \Pr(\Gamma) - \Pr(A \cap B) - \Pr(A \cap \Gamma) - \Pr(B \cap \Gamma) + \Pr((A \cap B \cap \Gamma))$].
16. Σε έναν αγώνα δρόμου το 20% των αθλητών διανύουν την απόσταση σε λιγότερο από τρεις ώρες. Αν επιλέξουμε τυχαία 10 αθλητές να υπολογίσετε τις πιθανότητες τουλάχιστον ένας αθλητής και ακριβώς ένας αθλητής να τερματίσει σε λιγότερο από τρεις ώρες.
17. Ένας τριτοετής φοιτητής Οικονομικών μπορεί να επιλέξει δύο μαθήματα μεταξύ πέντε θεωρητικών και δύο μεταξύ πέντε πρακτικών μαθημάτων για να παρακολουθήσει συνολικά τέσσερα μαθήματα. Πόσοι διαφορετικοί τρόποι υπάρχουν για την επιλογή των μαθημάτων αν:
- Η επιλογή είναι ελεύθερη.
 - Ένα συγκεκριμένο θεωρητικό μάθημα πρέπει να επιλεγεί.
 - Ένα συγκεκριμένο θεωρητικό μάθημα πρέπει να αποφευχθεί.
18. Στις αφρικανικές χώρες είναι συνηθισμένο φαινόμενο πολλά αγροτικά νοικοκυριά να διατηρούν ένα κοπάδι αιγοπροβάτων με σκοπό να το χρησιμοποιούν ως εξομαλυντικό παράγοντα για περιπτώσεις που η αγροτική σοδειά δεν είναι η αναμενόμενη ώστε να μην χρεοκοπήσουν. Η πιθανότητα χρεοκοπίας ενός νοικοκυριού είναι 20% και η πιθανότητα να χρησιμοποιεί το κοπάδι ζώων ως εξομαλυντικό παράγοντα δεδομένου ότι χρεοκοπεί είναι 12%. Επίσης η πιθανότητα να χρησιμοποιεί το κοπάδι ζώων ως εξομαλυντικό παράγοντα δεδομένου ότι δεν χρεοκοπεί είναι 90%. Υπολογίστε την πιθανότητα να μη χρεοκοπήσει ένα αφρικανικό νοικοκυριό που χρησιμοποιεί το κοπάδι.